MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto) Turunen/Vuojamo
19.12.2018, 13:00-16:00
Pisteitä myös hyvästä yrityksestä! **Laskimet ja kirjallisuus kielletty.**

Tällä kertaa saat olettaa tunnetuksi Fourier-käänteismuunnoksen kaavan.

---

1. Tiedetään, että $\hat{r} = r$, kun $r(t) = \mathrm{e}^{-\pi r^2}$. Laske tämän tiedon avulla Fourier-muunnos $\hat{s}$, kun $s(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

2. Todista, että Fourier-muunnos säilyttää energian eli että
$$||\hat{s}||^2 = ||s||^2$$
signaaleille $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

3. Kun $0 < r < 1$, *Poisson-ydin* $P_r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on $P_r(t) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\mathrm{e}^{i2\pi t\cdot k}$.

   (a) Laske $\hat{P}_r$.

   (b) Näytä, että $P_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(2\pi t)}$.

4. Miten määritellään signaalin $s : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos $\hat{s}$? Näytä, että s voidaan laskea takaisin signaalista $\hat{s}$.