Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Malinen/Kuortti
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI)
MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (ELEC1 ja ENG1)

Loppukoe ja tentti 13.12.2018

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin **selkeällä käsialalla**.

1. Määritä kaikki reaaliluvut $x \in \mathbb{R}$, joilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\pi}}, \quad \pi = 3.14159\ldots$$

suppenee. Tutki myös mahdolliset suppenemisvälin päätepisteet. (Tunnettuna voidaan pitää sitä, mitä luennoilla on todistettu harmonisista ja yliharmonisista sarjoista.)

Vihje: Miten tilanne päätepisteissä muuttuisi, jos $\pi = 2$?

2. Laske seuraavat raja-arvot:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x \cos^2 x} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}.$$

KÄÄNNÄ!

3. Näin joulun lähestyessä muistellaan usein entisaikojen idyllistä elämänmuotoa, jolloin nurkistaan jäätyneen matalan multapenkkatalon homehtuneille lattialankuille oli tapana levitellä olkia lasten iloksi & talikynttilöiden aiheuttaman tulipalovaaran maksimoimiseksi.

Tuberkuloosin ja isorokon riuduttamalla kansanosalla ei ollut varaa edes neljän desimaalin logaritmitauluihin, joita porvarisperheiden penskat koronkiskontaleikeissään jo kilvan käyttivät. Entisaikojen sankareita kunnioittaaksesi laske likiarvo $b \approx \sin\sqrt{10}$ käyttämällä Taylorin 1. asteen polynomia eli lineaarista approksimaatiota seuraavan reseptin mukaisesti:

a) Anna 1. asteen Taylorin polynomi $P(x)$ funktiolle $f(x) = \sin\sqrt{x}$ kehityskeskipisteessä $a = \pi^2$ (jonka valinta perustuu ikiaikaiseen perimätietoon, että $\pi^2 \approx 10$ varsin tarkasti).

b) Laske tämän avulla numeerinen arvo $b = P(10)$ neljän desimaalin tarkkuudella.

Vihje: Likiarvojen määräämiseksi vanhan ajan tapaan, aivan ilman laskinta, riittää tietää

$$\pi = 3.1415926\ldots \text{ ja } 1/\pi = 0.31830989\ldots,$$

jotka laskettiin jo viime jouluna sangen kummallisella tavalla.

4. Laske integraalit

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{ja} \quad \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\, dx.$$

Vihje: Ensimmäisessä osamurtokehitelmä. Jälkimmäiseen voi sijoittaa $x = u^2$.

5. Määritä differentiaaliyhtälön $y''(x) + 4y(x) = x^2$ yleinen ratkaisu.

KÄÄNNÄ!