Aalto-yliopisto

MS-A0002 Matriisilaskenta
Tentti 18.2.2019 klo 9.00-12.00

Tentissä ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Tehtävä 1: a) Laske vektorien $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$ skalaaritulo. Kuinka suuri on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma? **(2p)**

b) Sievennä kompleksiluku

$$\frac{1+4\,\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$$

muotoon $x + y\,\mathrm{i}$, missä x ja y ovat reaalilukuja. **(2p)**

c) Esitä kompleksiluku $(1-\mathrm{i})^7$ napakoordinaateissa siten, että sen argumentti on välillä $[0, 2\pi)$. **(2p)**

Tehtävä 2: Etsi kaikki eri tavat esittää vektori $\mathbf{b} = (1,5,5)$ vektorien $\mathbf{a}_1 = (2,5,0)$, $\mathbf{a}_2 = (3,6,-3)$ ja $\mathbf{a}_3 = (3,9,3)$ lineaariyhdistelmänä. Ts. etsi kaikki sellaiset kerroinvektorit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, että

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

(6p)

Tehtävä 3: a) Etsi matriisit $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ siten, että kaikilla matriiseilla $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ pätee

i) $B_1A = 2A$, **(1p)**

ii) $B_2A = 2B_2$, **(1p)**

iii) matriisin B_3A kaikki rivit ovat samoja kuin matriisin A kolmas rivi. **(1p)**

iv) matriisi AB_4 on muuten sama kuin matriisi A, mutta sen toinen sarake on täynnä nollia. **(1p)**

b) Oletetaan, että matriiseille A, B ja C pätee $AB = AC$, ja että A ei ole nollamatriisi. Onko totta, että matriisit B ja C ovat välttämättä samat? Todista väite tai etsi vastaesimerkki. **(2p)**

Tehtävä 4: Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Diagonalisoi A. **(4p)**

b) Laske A^{100}. Vastaukseen saa jäädä eksponenttimuotoisia lausekkeita (esim. 5^{100}). **(2p)**