Kvantti-ilmiöt, kevät 19, välikoe 1 malliratkaisut

Tehtävä 1 malliratkaisu

a) aikadilataatio: Liikkeessä olevan (1p) fysikaalisen systeemin ajankulu hidastuu (1p) paikallaan olevan havaitsijan näkökulmasta.
b) eetterihypoteesi: 1800-luvun lopussa ajateltiin valon tarvitsevan väliaineen (1p) edetäkseen avaruudessa. Tätä hypoteettista väliainetta kutsuttiin 'eetteriksi'. Eetterihypoteesi osoitettiin vääräksi (1p) kokeellisesti (mm. Michelson-Morleyn koe) ja teoreettisesti (suppea suhteellisuusteoria) 1900-luvun alussa.
c) kvanttikietoutuminen: Kahden kvanttisysteemin (esim. kubitit) yhteistä tilaa kutsutaan kietoutuneeksi, jos tilaa ei voi esittää yksittäisten systeemien tilojen tulona (1p). Kietoutuneessa tilassa yksittäisten systeemien mittaustulosten välillä on kvanttimekaanisia korrelaatioita (1p).
d) tunneloituminen: Kvanttihiukkanen voi läpäistä potentiaalivallin, jonka ylittämiseen hiukkasen liike-energia ei klassisesti riittäisi (2p).
e) epätarkkuusperiaate: Operaattoreilla, jotka eivät kommutoi, ei voi olla yhteisiä ominaistiloja (1p). Siten kvanttihiukkasen paikan ja liikemäärän arvoja ei voida tietää yhtäaikaisesti mielivaltaisella tarkkuudella, vaan paikan ja liikemäärän keskihajonnat toteuttavat missä tahansa kvanttitilassa epäyhtälön $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$ (1p).
f) mittauspostulaatti: Kun kvanttisysteemin jotain havaintosuuretta mitataan, niin mittauksen jälkeen systeemi siirtyy välittömästi mittaustulosta vastaavaan havaintosuureen ominaistilaan. (2p)

Tehtävä 2 malliratkaisu

a) Kappaleiden nopeudet ovat $v_A = 0{,}4c$ (1p) ja $v_B = -0{,}5c$ (1p). Kappaleen B nopeus v'_B kappaleen A lepokoordinaatistossa saadaan käyttämällä relativistista nopeuksien yhteenlaskukaavaa (1p)

$$v'_B = \frac{v_B - v_A}{1 - v_B v_A/c^2} = -0{,}75c\,. \quad \text{(1p)} \tag{1}$$

b) Kappaleen A lepokoordinaatistossa kappaleiden A ja B nopeudet ovat $v'_A = 0$ ja $v'_B = -0{,}75c$. Merkitään kappaleiden A ja B massoja m:llä. Kokonaisliikemääräksi ja kokonaisenergiaksi ennen törmäystä saadaan

$$P_{kok} = \gamma_{v'_B} m v'_B \qquad E_{kok} = mc^2 + \gamma_{v'_B} mc^2\,. \quad \text{(2p)} \tag{2}$$

Merkitään kappaleiden A ja B yhteistä nopeutta törmäyksen jälkeen kappaleen A alkuperäisessä lepokoordinaatistossa v'_{AB}. Kokonaisliikemääräksi ja kokonaisenergiaksi törmäyksen jälkeen saadaan

$$P_{kok} = 2\gamma_{v'_{AB}} m v'_{AB} \qquad E_{kok} = 2\gamma_{v'_{AB}} mc^2 \,. \quad \text{(2p)} \tag{3}$$

Liikemäärän ja energian säilymislaeista (1p) saadaan siis yhtälöt

$$\begin{aligned} \gamma_{v'_B} m v'_B &= 2\gamma_{v'_{AB}} m v'_{AB} \quad \text{(1p)} \\ mc^2 + \gamma_{v'_B} mc^2 &= 2\gamma_{v'_{AB}} mc^2 \,. \quad \text{(1p)} \end{aligned} \tag{4}$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan jakamalla puolittain mc^2:lla ratkaistua

$$\gamma_{v'_{AB}} = (1 + \gamma_{v'_B})/2 \,. \tag{5}$$

Sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan ratkaistua kappaleiden yhteiseksi nopeudeksi kappale A:n alkuperäisessä lepokoordinaatistossa

$$v'_{AB} = \frac{\gamma_{v'_B}}{1 + \gamma_{v'_B}} v'_B \approx -0{,}4514c \,. \quad \text{(1p)} \tag{6}$$

Muunnetaan vielä saatu vastaus kappale A:n alkuperäiseen lepokoordinaatistoon nopeuksien yhteenlaskukaavan avulla:

$$v_{AB} = \frac{v'_{AB} + v_A}{1 + v'_{AB} v_A / c^2} \approx -0{,}063c \,. \quad \text{(1p)} \tag{7}$$

Tehtävä 3 malliratkaisu

a) Normalisointivakion arvo voidaan ratkaista aaltofunktion normalisointiehdosta $\langle\varphi|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, |\varphi(x)|^2 = 1$ (1p). Integroidaan aaltofunktion itseisarvon neliö reaaliakselin yli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, |\varphi(x)|^2 &= N^2 \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x\, (x+a)^2 + \int_{0}^{a/2} \mathrm{d}x\, (-2x+a)^2 \right] \qquad \text{(1p)} \\ &= N^2 \left[\Big/_{-a}^{0} \frac{1}{3}(x+a)^3 - \Big/_{0}^{a/2} \frac{1}{6}(-2x+a)^3 \right] \\ &= \frac{1}{2} N^2 a^3 \,. \qquad \text{(1p)} \end{aligned} \tag{8}$$

Saadaan siis normalisointiehdosta $N = \sqrt{2/a^3}$ (1p).

b) Lasketaan paikan odotusarvo:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi|\hat{x}|\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ x|\varphi(x)|^2 \qquad \text{(1p)} \\
&= N^2\left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x\ x(x+a)^2 + \int_{0}^{a/2} \mathrm{d}x\ x(-2x+a)^2\right] \qquad \text{(1p)} \\
&= N^2\left[\Big/_{-a}^{0}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2\right) + \Big/_{0}^{a/2}\left(x^4 - \frac{4}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2\right)\right] \qquad \text{(1p)} \\
&= N^2\left[-\frac{1}{16}a^4\right] = -\frac{1}{8}a\,. \qquad \text{(1p)}
\end{aligned} \tag{9}$$

c) Lasketaan liikemäärän odotusarvo:

$$\begin{aligned}
\langle\varphi|\hat{p}|\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\ \overline{\varphi(x)}(-i\hbar)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) \qquad \text{(1p)} \\
&= -i\hbar N^2\left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x\ (x+a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+a) + \int_{0}^{a/2} \mathrm{d}x\ (-2x+a)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(-2x+a)\right] \qquad \text{(1p)} \\
&= -i\hbar N^2\left[\Big/_{-a}^{0}\frac{1}{2}(x+a)^2 + \Big/_{0}^{a/2}\frac{1}{2}(-2x+a)^2\right] \qquad \text{(1p)} \\
&= -i\hbar N^2\left[\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\right] = 0\,. \qquad \text{(1p)}
\end{aligned} \tag{10}$$

Tehtävä 4

a) Ratkaistaan ominaisarvoyhtälö $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$ (1p), kun merkitään $|E\rangle = \varphi_0|0\rangle + \varphi_1|1\rangle$.

$$\begin{aligned}
\hat{H}|E\rangle &= \hat{H}(\varphi_0|0\rangle + \varphi_1|1\rangle) \\
&= \varphi_0(|0\rangle + i|1\rangle) + \varphi_1(-i|0\rangle + |1\rangle) \\
&= (\varphi_0 - i\varphi_1)|0\rangle + (i\varphi_0 + \varphi_1)|1\rangle\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Tämän tilavektorin tulisi olla sama kuin vektorin

$$E|E\rangle = E(\varphi_0|0\rangle + \varphi_1|1\rangle) = E\varphi_0|0\rangle + E\varphi_1|1\rangle\,, \tag{12}$$

joten saadaan kertoimille yhtälöpari

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_0 - i\varphi_1 = E\varphi_0 \\ i\varphi_0 + \varphi_1 = E\varphi_1 \end{array}\right. . \qquad \text{(1p)} \tag{13}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä voidaan ratkaista $\varphi_0 = i\varphi_1/(1-E)$. Sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}
-\frac{\varphi_1}{1-E} + \varphi_1 &= E\varphi_1 && | : \varphi_1 \\
-\frac{1}{1-E} + 1 &= E && | \cdot (1-E) \\
-1 + (1-E) &= E(1-E) \\
E(2-E) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ominaisarvoiksi saadaan siis $E = 0$ ja $E = 2$ (1p).

Ominaisarvoa $E = 0$ vastaavan ominaistilan $|E = 0\rangle$ kertoimille saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \varphi_0 - i\varphi_1 = 0 \\ i\varphi_0 + \varphi_1 = 0 \end{cases}, \tag{15}$$

joten saadaan $\varphi_1 = -i\varphi_0$, ja ominaistilaksi $|E = 0\rangle = \varphi_0(|0\rangle - i|1\rangle)$. Kerroin φ_0 voidaan valita reaaliarvoiseksi, ja määrittää sen arvo normalisointiehdosta (1p): $\langle E = 0|E = 0\rangle = 2|\varphi_0|^2 = 1$, joten $\varphi_0 = 1/\sqrt{2}$. Hamiltonin operaattorin ominaisarvoa $E = 0$ vastaavaksi normalisoiduksi ominaistilaksi saadaan siis $|E = 0\rangle = (|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ (1p).

Ominaisarvoa $E = 2$ vastaavan ominaistilan $|E = 2\rangle$ kertoimille saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \varphi_0 - i\varphi_1 = 2\varphi_0 \\ i\varphi_0 + \varphi_1 = 2\varphi_1 \end{cases}, \tag{16}$$

joten saadaan $\varphi_1 = i\varphi_0$, ja ominaistilaksi $|E = 2\rangle = \varphi_0(|0\rangle + i|1\rangle)$. Kerroin φ_0 voidaan määrittää samoin kuin edellisessä kohdassa. Hamiltonin operaattorin ominaisarvoa $E = 2$ vastaavaksi normalisoiduksi ominaistilaksi saadaan siis $|E = 2\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ (1p).

b) Tilavektori ajanhetkellä t voidaan esittää energian ominaistilojen ja -arvojen avulla muodossa

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_E \langle E|\varphi(0)\rangle e^{-itE/\hbar}|E\rangle\,. \qquad \text{(1p)} \tag{17}$$

Sijoitetaan ominaistilat, -arvot ja alkutila $|0\rangle$ tähän lausekkeeseen.

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)\rangle &= \langle E = 0|0\rangle e^{-it\cdot 0/\hbar}|E = 0\rangle + \langle E = 2|0\rangle e^{-it\cdot 2/\hbar}|E = 2\rangle && \text{(1p)} \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle - i|1\rangle) + \frac{e^{-2it/\hbar}}{2}(|0\rangle + i|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(1 + e^{-2it/\hbar})|0\rangle - \frac{i}{2}(1 - e^{-2it/\hbar})|1\rangle\,. && \text{(1p)}
\end{aligned} \tag{18}$$

c) Todennäköisyys mitata kubitin arvoksi 0 ajanhetkellä t saadaan sisätulon neliönä $|\langle 0|\varphi(t)\rangle|^2$ (1p). Sisätuloksi saadaan $\langle 0|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{2}(1 + e^{-2it/\hbar})$ (1p), joten sen itseisarvon neliö on

$$\begin{aligned}
|\langle 0|\varphi(t)\rangle|^2 &= \overline{\langle 0|\varphi(t)\rangle}\langle 0|\varphi(t)\rangle \\
&= \frac{1}{4}(1 + e^{2it/\hbar})(1 + e^{-2it/\hbar}) \\
&= \frac{1}{4}(1 + e^{-2it/\hbar} + e^{2it/\hbar} + 1) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \cos(2t/\hbar))\,. && \text{(1p)}
\end{aligned} \tag{19}$$

Tehtävä 5

a) Aluessa $x < 0$ potentiaali on ääretön, joten aaltofunktion täytyy hävitä: $\varphi(x) = 0$ (1p). Alueessa $0 \leq x < L$ potentiaali on nolla, joten hiukkanen on vapaa. Vapaan hiukkasen energian arvoa E vastaava ominaistila on muotoa

$$\varphi_I(x) = c_+ e^{ipx/\hbar} + c_- e^{-ipx/\hbar}\,, \tag{20}$$

missä c_+, c_- ovat jotain vakioisia kompleksilukuja, ja $p = \sqrt{2mE}$ (1p). Alueessa $x \geq L$ potentiaalin arvo on suurempi kuin hiukkasen energia E, joten alue on energeettisesti kielletty. Tällöin energian ominaistilojen aaltofunktiot ovat muotoa

$$\varphi_{II}(x) = d_+ e^{\alpha x} + d_- e^{-\alpha x}\,, \tag{21}$$

missä d_+, d_- ovat jotain vakioisia kompleksilukuja, ja $\alpha = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ (1p). Jotta aaltofunktio ei divergoisi äärettömyydessä, niin täytyy asettaa $d_+ = 0$ (1p), ja alueen $x \geq L$ aaltofunktioksi saadaan

$$\varphi_{II}(x) = d_- e^{-\alpha x}\,. \tag{22}$$

b) Kohdassa $x = 0$ täytyy vaatia, että $\varphi_I(0) = 0$. Tästä saadaan kertoimille ehto

$$c_+ + c_- = 0 \qquad\qquad (1\text{p})\,. \tag{23}$$

Kohdassa $x = L$ vaaditaan sekä aaltofunktion että sen ensimmäisen derivaatan jatkuvuus (1p). Saadaan ehdot

$$\begin{aligned} \varphi_I(L) &= \varphi_{II}(L) \\ c_+ e^{ipL/\hbar} + c_- e^{-ipL/\hbar} &= d_- e^{-\alpha L}\,, \qquad\qquad (1\text{p}) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi_I}{\mathrm{d}x}(L) &= \frac{\mathrm{d}\varphi_{II}}{\mathrm{d}x}(L) \\ i\frac{p}{\hbar}(c_+ e^{ipL/\hbar} - c_- e^{-ipL/\hbar}) &= -\alpha d_- e^{-\alpha L}\,. \qquad\qquad (1\text{p}) \end{aligned} \tag{25}$$

c) Sijoitetaan $c_- = -c_+$ kahteen jälkimmäiseen jatkuvuusehtoon, ja saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} c_+(e^{ipL/\hbar} - e^{-ipL/\hbar}) = d_- e^{-\alpha L} \\ i\frac{p}{\hbar} c_+(e^{ipL/\hbar} + e^{-ipL/\hbar}) = -\alpha d_- e^{-\alpha L} \end{cases}. \qquad (1\text{p}) \tag{26}$$

Jaetaan alempi yhtälö ylemmällä puolittain, ja saadaan

$$\begin{aligned} i\frac{p}{\hbar}\frac{e^{ipL/\hbar} + e^{-ipL/\hbar}}{e^{ipL/\hbar} - e^{-ipL/\hbar}} &= -\alpha \\ \frac{e^{ipL/\hbar} - e^{-ipL/\hbar}}{e^{ipL/\hbar} + e^{-ipL/\hbar}} &= -i\frac{p}{\hbar\alpha} \\ \frac{2i\sin(pL/\hbar)}{2\cos(pL/\hbar)} &= -i\frac{p}{\hbar\alpha} \\ \tan(pL/\hbar) &= -\frac{p}{\hbar\alpha}\,. \qquad\qquad (1\text{p}) \end{aligned} \tag{27}$$

Sijoittamalla p:n ja α:n lausekkeet saadaan energian arvoille ehto

$$\tan^2(\sqrt{2mE}L/\hbar) = -\frac{E}{U_0 - E}\,. \qquad \text{(1p)} \tag{28}$$

Tämän yhtälön toteuttaa vain diskreetti joukko energian arvoja E (voidaan nähdä esim. graafisesti), joten hiukkasen energia on kvantittunut (1p).