Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

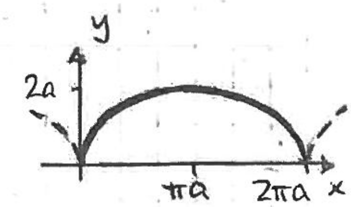
Metsalo/Karrila

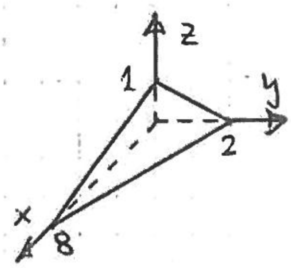
MS-A0309 Differential- och integralkalkyl 3

Tentamen 11.4.2019

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Tentamenstiden är 3 timmar.





1. a) Låt $\Psi(x, y, z)$ vara ett skalärfält av klass C^2 i $\mathbb{R}^3$.
   Visa att $rot(grad(\Psi)) = curl(grad(\Psi)) = \nabla \times (\nabla(\Psi)) \equiv \mathbf{0}$. (3p.)
   b) Låt $\mathbf{H}(x, y, z) = H_1(x, y, z)\mathbf{i} + H_2(x, y, z)\mathbf{j} + H_3(x, y, z)\mathbf{k}$ vara ett vektorfält av klass C^2 i $\mathbb{R}^3$.
   Visa att $div(rot(\mathbf{H})) = div(curl(\mathbf{H})) = \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{H}) \equiv 0$. (3p.)
2. En båge av cykloiden kan ges på parameterform som
   $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$
   (se den övre figuren till höger).
   a) Visa att cykloidbågens längd är $8a$. (3p.)
   b) Om vi startar i origo (vilket svarar mot parametervärdet $t = 0$) och går sträckan $2a$ längs cykloidbågen, var hamnar vi då? (3p.)
3. Beräkna massan hos triangeln
   $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 4y + 8z = 8;\ x, y, z \geq 0\}$ i den nedre figuren till höger, om dess area-densitet i punkten $(x, y, z) \in S$ är $\delta(x, y, z) = x + 2y + 3z$. (6p.)
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2 - x^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2 - y^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2 - z^2)\mathbf{k}$.
   a) Visa att $\mathbf{F}$ är virvelfritt ($rot(\mathbf{F}) = curl(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$) i $\mathbb{R}^3$ och bestäm en skalär potential $\Phi(x, y, z)$ till $\mathbf{F}$ sådan att $grad(\Phi) = \nabla\Phi = \mathbf{F}$. (3p.)
   b) Visa att $\mathbf{F}$ är källfritt ($div(\mathbf{F}) = \nabla \bullet \mathbf{F} \equiv 0$) i $\mathbb{R}^3$ och bestäm en vektorpotential $\mathbf{G}(x, y, z)$ till $\mathbf{F}$ sådan att $rot(\mathbf{G}) = curl(\mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. (3p.)
5. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ ut genom begränsningsytan till halvklotet $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3|;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$, antingen direkt som en flödesintegral (observera därvid, att Ω:s begränsningsyta består av två delar) eller genom att använda divergenssatsen (Gauss' sats). (6p.)

På baksidan finns en del integralsatser.

Nyttiga (?) formler:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, $\cos^2\phi = (1 + \cos(2\phi))/2$, $\sin^2\phi = (1 - \cos(2\phi))/2$.
$\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$, $\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = 1 - 2\sin^2\phi$.

Integralsatser:

1. $\int_{t_0}^{t_1} H'(t)dt = H(t_1) - H(t_0)$
2. $\int_C (\nabla\Phi) \bullet d\mathbf{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$, där kurvan C går från punkten P_0 till punkten P_1.
3. $\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} dA = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ (Greens sats i planet)
4. $\iint_R (\nabla \bullet \mathbf{F}) dA = \oint_C \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}} ds$ (Greens sats i planet)
5. $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \widehat{\mathbf{N}} dS = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ (Stokes' sats)
6. $\iiint_D (\nabla \bullet \mathbf{F}) dV = \iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}} dS$ (Gauss' sats)
7. $\iint_S (\widehat{\mathbf{N}} dS \times \nabla)(\ldots) = \oint_C d\mathbf{r}(\ldots)$, där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\mathbf{F}$ eller $\times\mathbf{F}$.
   (Stokes' universalsats)
8. $\iiint_D dV \cdot \nabla(\ldots) = \iint_S \widehat{\mathbf{N}} dS(\ldots)$, där $(\ldots)$ kan t.ex. vara Φ, $\bullet\mathbf{F}$ eller $\times\mathbf{F}$.
   (Gauss' universalsats)