PHYS-C0220 Termodynamiikka ja statistinen fysiikka
Tentti 9.4.2019 [5 tehtävää, 2 sivua]
Ylioppilaskirjoituksissa hyväksytty laskin on sallittu, taulukkokirjat ja muut kaavakokoelmat eivät ole sallittuja. Paperin kääntöpuolelta löydät mahdollisesti hyödyllisiä kaavoja.

Tehtävä 1. Ekvipartitioteoreema (6p.)
Selitä mikä on statistisen fysiikan ekvipartitioteoreema: mitä se tarkalleen ottaen ennustaa ja milloin sen voi katsoa olevan luotettava? Anna yksi konkreettinen käytännön esimerkki tapauksesta, jossa ekvipartitioteoreema toimii ja antaa fysikaalisesti oikean tuloksen. Anna tämän lisäksi vielä käytännön esimerkki tapauksesta missä ekvipartitioteoreema antaa väärän tuloksen (ja selitä miksi näin tapahtuu).

Tehtävä 2. 2D-kaasun vauhtijakauma (6p.)
Tarkastellaan kaksiuloitteista (2D) ja yksiatomista ideaalikaasua lämpötilassa T ja pinta-alalla A, jotka molemmat oletetaan vakioiksi. Johda kaasun normitettu vauhtijakauma $f_{2D}(v)$ sekä määritä tämän avulla kaasuhiukkasten keskimääräinen vauhti $\langle v \rangle$ sekä rms-vauhti $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$. Miten näiden karakterististen vauhtien suhde, $v_{\text{rms}}/\langle v \rangle$, riippuu hiukkasten massasta m ja kaasun lämpötilasta T?

Tehtävä 3. Ideaaliset kvanttikaasut (6p.)
Kurssilla tarkastelimme kaksien erilaisten kvanttimekaanisten hiukkasten, fermionien ja bosonien, muodostamia ideaalisia kvanttikaasuja. Kuvaile lyhyesti ja ytimekkäästi näiden hiukkasten ja niiden muodostamien kaasujen fysikaalisia ominaisuuksia ja eroja toisiinsa nähden. Selitä sitten lyhyesti miten (i) fermionien ja toisaalta (ii) bosonien muodostama idaalinen kvanttikaasu käyttäytyy hyvin alhaisilla lämpötiloilla ($T \to 0$).

Tehtävä 4. Isobaarinen-isoterminen ensemble (6p)
Oletetaan, että meillä on suljettu systeemi, joka on pieni osa eristettyä systeemiä. Olkoon tämän eristetyn systeemin sisäenergia E_0, tilavuus V_0 ja hiukkasmäärä N_0. Tarkastelemamme systeemi on mekaanisessa vuorovaikutuksessa ympäristön kanssa siten, että sen tilavuus voi muuttua. Jätämme huomioimatta mahdolliset rajapintaan liittyvät energiatermit (pintaenergia, pinnan elastisuus jne.) Ympäristö, jonka termodynaamisen tilan määrittävät täydellisesti sen sisäenergia E_2, tilavuus V_2 ja hiukkasmäärä N_2 approksimoidaan lämpö- ja painevarannoksi tarkastelemallemme systeemille.
a) Määritä todennäköisyys tarkastellun systeemin mikrotilalle, jonka energia on ε_i ja tilavuus V_i. Määritä täten myös systeemin *isoterminen-isobaarinen* partitiofunktio Z_{pT}. (3p)
b) Mikä on sopiva termodynaaminen potentiaali systeemillemme? Määritä tämän termodynaamisen potentiaalin lauseke (a)-kohdassa johtamasi todennäköisyyden, Gibbsin entropiayhtälön, sekä partitiofunktion Z_{pT} avulla. (3p)

KÄÄNNÄ

Tehtävä 5. Ultrarelativistinen ideaalikaasu. (6p)
Kurssilla käsittelimme kaasuja, joissa hiukkasten nopeudet olivat hyvin pieniä valonnopeuteen c nähden (ts. ei-relativistisia kaasuja). Yleisesti ottaen hiukkasten energia voidaan kirjoittaa muodossa

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

jossa $\vec{p}$ on hiukkasen liikemäärä ja m sen lepomassa (eli massa koordinaatistossa, jossa hiukkanen on levossa). Niin kutsutulla *ultrarelativistisella* rajalla $p \gg mc$ ja hiukkasten energia on muotoa

$$E \approx pc = \hbar ck,$$

jossa k on hiukkasen kvanttimekaaninen aaltoluku.
a) Vapaille hiukkasille tilavuudessa V tilatiheyden määritti lauseke

$$g(k)dk = \frac{Vk^2}{2\pi^2}dk.$$

Osoita nyt, että vuorovaikuttamattomien ultrarelativististen kaasuhiukkasten yksihiukkaspartitiofunktio on muotoa

$$Z_1 = \frac{V}{\Lambda^3},$$

ja määritä Λ. (2p)
b) Selitä millä oletuksilla voimme kirjoittaa N vuorovaikuttamattoman hiukkasen muodostaman kaasun partitiofunktion muodossa (2p)

$$Z_N \approx \frac{Z_1^N}{N!}$$

c) Tarkastellaan lopuksi tapausta, jossa (b)-kohdan oletuksesi on voimassa. Määritä tällöin ultrarelativistisen ideaalikaasun sisäenergia U ja vertaa sitä ei-relativistisen ideaalikaasun sisäenergian lausekkeeseen. (2p)

Seuraavista tiedoista voi olla apua:

- Geometrinen sarja $a\sum_{n=0}^{\infty} r^n = a/(1-r)$
- Stirlingin kaava: $\ln N! \approx N\ln N - N$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$
- $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$
- $\tanh x \approx x - \frac{x^3}{3}$, $x \ll 1$.
- $\sinh x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
- $\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.