Matematiikka
Aalto-yliopisto

Hannukainen / Kuortti

MS-C1340 Lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt

Loppukoe 15.12.2016

Ei Laskimia. Koeaika on 3 tuntia.

Sinulla on kaksi vaihtoehtoa :

- Ratkaise tehtävät 1-4. Tällöin kurssin arvosana määräytyy laskuharjoitustehtävien ja kokeen arvosanan perusteella.
- Ratkaise tehtävät 1,3,5,6. Tällöin kurssin arvosana määräytyy kokeen arvosanan perusteella.

1. Olkoot matriisin $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ singulaariarvohajotelma muotoa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(i) Määritä $R(A)$ sekä ortogonaaliprojektio (Euklidisen sisätulon mielessä) $R(A)$:lle

(ii) Olkoot $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Tarkastele PNS - tehtävää : etsi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ siten, että

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2$$

saa pienimmän arvonsa. Näytä, että PNS-tehtävän ratkaisu $\boldsymbol{x}$ toteuttaa yhtälön $A\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$, jossa P on ortogonaaliprojektio $R(A)$:lle.

(iii) Ratkaise PNS - tehtävä, kun $\boldsymbol{b}$ on siten, että

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Olkoot $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Näytä, että

(i) $|\|\boldsymbol{w}\|_2 - \|\boldsymbol{v}\|_2| \leq \|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\|A\boldsymbol{v}\|_2 \leq \|A\|_2 \|\boldsymbol{v}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Kiinnitetään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Laske $\|A\|_2^2$ ja $\kappa_2^2(A)$.

3. Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ siten, että

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0. \end{bmatrix}$$

(i) Mitkä matriiseista A_1, A_2, A_3 ovat diagonalisoituvia ?

(ii) Olkoot $N = A_2 - I$. Näytä, että N on nilpotentti ja todista identiteetti

$$A_2^n = I + nN.$$

Laske A_2^{100} ja A_3^5.

4. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Laske matriisin $R(A)$:n ortonormaali kanta käyttämällä Gram-Schmidt prosessia.

(ii) Laske matriisin A QR-hajotelma.

5. Olkoot

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ja $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{x}$ sekä $\|\boldsymbol{x}\|_M^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$.

(i) Näytä, että on $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ on sisätulo.

(ii) Olkoot $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Tarkastellaan matriisinormia

$$\|A\|_M = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_M}{\|\boldsymbol{x}\|_M}.$$

Näytä, että $\|A\|_M^2 = \lambda_{max}(A^T M A)$, jossa $\lambda_{max}(A^T M A)$ on matriisin $A^T M A$ suurin ominaisarvo

(iii) Laske $\|B\|_M$.

6. Samaistetaan ensimmäisen asteen polynomit avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanssa siten, että

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow p(t) = \sum_{i=1}^{2} x_i t^{i-1}.$$

(i) Määritä matriisi $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ siten, että

$$\boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y} = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{2} x_i t^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{2} y_j t^{j-1} \right) dt$$

(ii) Laske avaruuden R^2 ortonormaali kanta sisätulossa $\boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y}$ käyttämällä Gram-Schmidt prosessia.

(iii) Piirrä ortonormaaleja kantavektoreita vastaavat polynomit välillä $(0, 1)$.