Matematik
Aalto-universitetet

Hannukainen / Kuortti

MS-C1340 Lineaarialgebra ja differentiaaliyhtälöt

Finalprov 15.12.2016

Inga räknare tillåtet. Skrivtid 3 timmar.

Du har två alternativ att välja mellan :

- Lösa problemet 1-4. Betyg baseras på poängen från övningar och finalprov
- Lösa problemet 1,3,5,6. Betyg baseras endast på poängen från finalprov

1. Tag $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ med singulärvärdesuppdelning

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

   (a) Hitta en bas för $R(A)$ och beräkna den ortogonala projektionen på $R(A)$.

   (b) Låt $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ och låt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ minimera

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2. \tag{1}$$

   Visa att $\boldsymbol{x}$ kan lösas ut från ekvationen $A\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ där P är den ortogonala projektionen på $R(A)$.

   (c) Låt

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Hitta $\boldsymbol{x}$ som minimerar (1).

2. Lat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bevisa att

   (a) $|\|\boldsymbol{w}\|_2 - \|\boldsymbol{v}\|_2| \leq \|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$

   (b) $\|A\boldsymbol{v}\|_2 \leq \|A\|_2 \|\boldsymbol{v}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

   (c) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

   Beräkna $\|A\|_2^2$ och $\kappa_2^2(A)$.

3. Låt $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Vilka av matriserna A_1, A_2, A_3 är diagonaliserbara ?

(b) Låt $N = A_2 - I$. Bevisa att N är nilpotent och bevisa identiteten

$$A_2^n = I + nN.$$

(c) Beräkna A_2^{100} och A_3^5.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Använda Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess för att konstruera en ortonormal bas för $R(A)$.

(b) Beräkna QR-faktoriseringen av matrisen A.

5. Låt

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{x}$, $\|\boldsymbol{x}\|_M^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$.

(a) Bevisa att $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ är en inre produkt.

(b) Låt $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ och definera matrisnormen

$$\|A\|_M = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2, \boldsymbol{x}\neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_M}{\|\boldsymbol{x}\|_M}.$$

Bevisa att $\|A\|_M^2 = \lambda_{max}(A^T M A)$ där $\lambda_{max}(A^T M A)$ är det största egenvärdet för matrisen $A^T M A$.

(c) Beräkna $\|B\|_M$.

6. För varje vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ definera ett polynom $p(t)$ så att

$$p(t) = \sum_{i=1}^{2} x_i t^{i-1}.$$

(a) Beräkna matrisen $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ så att

$$\boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y} = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{2} x_i t^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{2} y_j t^{j-1} \right) dt$$

(b) Använda Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess för att konstruera en ortonormal bas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\}$ för $\mathbb{R}^2$ med inre produkt $\boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{y}$.

(c) Rita grafen på intervallet $(0, 1)$ för polynomen som motsvarar $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$.