MS-C1420 Fourier-analys (Aalto-universitetet) Turunen / Vuojamo
4.4.2018, 13:00–16:00

Kalkylator och litteratur är förbjudna. Poäng också för goda försök!
Denna gång får du använda formeln för den inversa Fourier-transformen.

---

1. Vad menar man med att "Fourier-transformen bevarar energin"? Beräkna energin av signalen $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, där $s(t) = \int_{-1}^{2} e^{i\pi t \cdot \nu} \, d\nu$.

2. Man definierar *Dirichlet-kärnan* $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ som $D_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} e^{i2\pi t \cdot k}$.

   a) Räkna $\widehat{D_N} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

   b) Visa, att $D_N(t) = \dfrac{\sin(\pi(2N+1)t)}{\sin(\pi t)}$, när $t \notin \mathbb{Z}$.
   (Tips: $2i\sin(\alpha) = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$, och $2i\sin(\pi t) D_N(t) = \cdots$, där observation $(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)+(e-f) = a-f$ kan hjälpa.)

3. Hur definierar man den diskreta Fourier-transformen $\widehat{s}$ av signalen $s : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$? Argumentera, hur man kan beräkna s tillbaka från $\widehat{s}$.

4. *Wigner-distributionen* $W[s] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ av $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieras som

$$W[s](t,\nu) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi u \cdot \nu} \, s(t+u/2) \, s(t-u/2)^* \, du.$$

   Beräkna $W[s]$, när $s(t) = e^{-\pi t^2}$ (vi vet att då gäller $\widehat{s} = s$).

Tehtävät **suomeksi** paperin toisella puolen!