Matematiikka
Aalto-yliopisto

Malinen/Puska

MS-C1342 Lineaarialgebra

Loppukoe ja tentti 31.5.2019

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Kirjoita opiskelijanumerosi erityisen selkeästi. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero ja nimi.

Ei apuvälineitä.

Kullekin kokelaalle lasketaan arvosana sekä 5. periodin 2019 laskuharjoituspisteiden kanssa että pelkkänä tenttinä arvioituna. Näistä arvosanoista korkeampi merkitään opintorekisteriin.

1. Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Määritä nolla-avaruudet $N(A_1), N(A_2), N(A_3)$.

   (b) Mitkä matriiseista A_1, A_2, A_3 ovat diagonalisoituvia? Onko jokin matriiseista jopa unitaarisesti (ortogonaalisesti) diagonalisoituva? Miksi?

   (c) Mitä dimensiolause sanoo erityisesti matriisista A_2?
   Vihje: Dimensiolause on eräs yhteys matriisin määrittelyjoukon, nolla-avaruuden ja kuva-avaruuden dimensioiden välillä.

2. (a) Olkoot $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siten että

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{3}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2.$$

   Etsi symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ jolle pätee $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}$. Näytä, että f on avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulo tarkastamalla sisätulon määritelmän kolme ehtoa.

   (b) Etsi euklidisen sisätulon $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ mielessä ortonormaali kanta avaruudelle $\mathbb{R}^2$ käyttäen Gram-Schmidtin ortogonalisointiprosessia vektoreihin $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1$. Tässä $\boldsymbol{e}_1 = [1 \quad 0]^T$ ja $\boldsymbol{e}_2 = [0 \quad 1]^T$ ovat luonnollisia kantavektoreita.

3. Merkitään euklidista vektorinormia $\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$.

(a) Määrittele vektorinormia $\|\cdot\|_2$ vastaava (indusoitu) operaattorinormi $\|\cdot\|_{op}$ matriiseille $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Käyttämällä tätä operaattorinormin määritelmää osoita, että

$$\|A\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|A\|_{op}\|\boldsymbol{x}\|_2 \quad \text{jokaiselle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ja

$$\|A+B\|_{op} \leq \|A\|_{op} + \|B\|_{op} \quad \text{jokaiselle } A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(c) Olkoot

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Laske $\|A_1\|_{op}$ sekä $\|A_2\|_{op}$. **Vihje:** Olisiko singulaariarvohajotelma mitään, ellet halua käyttää suoraa laskua jälkimmäiselle matriisille?

4. Tarkastellaan matriisia $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, jonka singulaariarvohajotelma on

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(a) Määritä $R(A)$ sekä ortogonaaliprojektio (euklidisen sisätulon mielessä) $R(A)$:lle.

(b) Olkoot $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Tarkastellaan pienimmän neliösumman tehtävää: Etsi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ joka minimoi funktion

$$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2.$$

Näytä, että ratkaisulle $\boldsymbol{x}$ pätee $A\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$, jossa P on (euklidiseen sisätuloon liittyvä) ortogonaaliprojektio $R(A)$:lle.