Kurssi MS-A0003 (sekä MS-A0005) **Matriisilaskenta**
Maanantai 18.2.2019 klo 9:00-12:00 **(Turunen)**

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. a) Miten määritellään tason $\mathbb{R}^2$ pisteiden $u, v \in \mathbb{R}^2$ *sisätulo* $\langle u, v\rangle = u \cdot v$ ja *etäisyys* $\|u - v\|$?

   b) On tunnettua, että vektorit $u, v \in \mathbb{R}^2$ toteuttavat Cauchy–Schwarz -epäyhtälön $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$. Todista tämän tiedon avulla *kolmioepäyhtälö*

   $$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

   Piirrä kuva, ja selitä sen avulla miten tämä epäyhtälö liittyy kolmioihin.

2. Kolmannen asteen polynomi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ saa arvot

   $$f(1) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 0 \quad \text{ja} \quad f(-2) = 3.$$

   Tässä siis $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Kirjoita matriisiyhtälö, josta ratkaiset vakiot a, b, c, d Gauss-eliminaatiolla.

3. Olkoon $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Etsi matriisin B ominaisarvot ja kaikki ominaisvektorit. Onko B diagonalisoituva? Perustele!

4. Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ reaalinen singulaariarvohajoitelma (SVD). Toisin sanoen etsi matriisit $U, \Sigma, V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, joille $A = U\Sigma V^*$, missä U, V ovat ortogonaalisia (unitaarisia) ja Σ on singulaariarvojen diagonaalimatriisi.

   Tarkista, että $A = U\Sigma V^*$.