

MS-A0003 (ELEC1) & MS-A0005 (ENG1)
Tiistai 11.12.2018 klo 16:30-19:30

Matriisilaskenta
(Turunen / Kuutela)

Laskimet ja taulukot eivät ole sallittuja.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

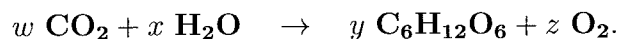
1. Olkoot $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ tason \mathbb{R}^2 vektoreita.
(Merkinnät $x = (a, b)$ ja $y = (c, d)$ voivat helpottaa laskemista.)
 - a) Määrittele *pistetulo* (eli *skalaaritulo*) $\langle x, y \rangle = x \cdot y$ ja *normi* $\|x\|$.
 - b) Osoita, että

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

(Huomautus: Tehtävän ratkaisussa ei saa käyttää cos-funktiota, vaan vain pistetulon ja normin perusmääritelmiä.

Tässä voi olla helpointa laskea $\|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 \geq \dots \geq 0$.)

2. Määritä pienimmät positiiviset kokonaisluvut w, x, y, z reaktiokaavassa



(Fotosynteesissä hiilidioksidia ja vettä muuttuu glukoosiksi ja hapeksi.)
Kirjoita yhtälö matriisimuodossa ja ratkaise Gauss-eliminoinnilla.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{bmatrix}$, missä $p = 4/5$ ja $q = 3/4$.
 - (a) Tarkista, että $\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 1/(1-p) \\ 1/(1-q) \end{bmatrix}$ ovat A :n ominaisvektoreita.
Mitkä ovat vastaavat ominaisarvot?
 - (b) Diagonalisoi matriisi A .
 - (c) Laske raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.
4. Etsi symmetriselle matriisille $S = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ unitaarinen diagonalisointi.
Toisin sanoen etsi unitaarinen matriisi V , jolle $D = V^*SV$ on diagonaalinen. Tarkista tuloksesi laskemalla VDV^* .