1. (a) Koska energian yksikkö on joule eli newtonmetri (ja newton on voiman yksikkö eli massa kertaa kiihtyvyys), ja toisaalta joule on wattisekunti (ja watti on volttiampeeri), saadaan

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A\,s^3}}$$

(b) Gaussin lause kertoo, että tietyssä tilavuudessa (V) oleva vektorikentän kokonaisdivergenssi on aina sama kuin tämän kentän kokonaisvuo joka menee ko. tilavuuden reunan (S) läpi (ulospäin). Kaavan muodossa

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{D}\,\mathrm{d}v = \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$$

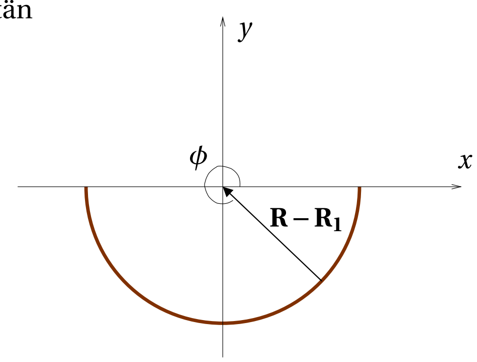
Eli ikäänkuin yksi integrointi (kolmesta) kumoaa derivaatan (nabla), ja jäljelle jää (kaksiulotteinen) sijoitus reunalla.

Sähköstatiikassa Gaussin lauseen voi tulkita käyttämällä sitä sähkövuontiheyteen, jonka divergenssi kaikkialla on kussakin pisteessä oleva varaustiheys. Kun se integroidaan minkä tahansa tilavuuden yli, on tulos tilavuuden sisältämä kokonaisvaraus. Sen on siis oltava aina täsmälleen sama kuin ulospäin pinnan reunan läpi pursuava kokonaissähkövuo.

Ja magnetostatiikassa, kun Gaussin lausetta soveltaa magneettivuotiheyteen, jonka divergenssi on aina nolla, voi päätellä, että minkä tahansa suljetun pinnan läpi menevä kokonaismagneettivuo on nolla. (Eli jos jostain pinnan kohdasta vuota menee sisään, pitää täsmälleen yhtä paljon tulla jostain toisesta pinnan kohdasta ulos.)

2. Pisteessä $\mathbf{R}_1$ oleva varaus q aiheuttaa pisteeseen $\mathbf{R}$ sähkökentän

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{R}-\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_1|^3}$$



Nyt lähde on jakautunut puoliympyräviivalle, jolloin täytyy integroida. Differentiaalinen varaus on $\mathrm{d}q = \rho_l\,\mathrm{d}l$, jossa differentiaalinen viivanpituus (a-säteisellä ympyränkaarella) on $\mathrm{d}l = a\mathrm{d}\phi$. Kenttäpiste on origossa ($\mathbf{R}=0$), ja lähdepiste ympyrän alakehällä ($\mathbf{R}_1 = a\hat{\mathbf{r}}$), jossa $\pi < \phi < 2\pi$. Tällöin on $\mathbf{R}-\mathbf{R}_1 = -a\hat{\mathbf{r}}$.

Saadaan

$$\mathbf{E}(0) = -\int_\pi^{2\pi} \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\rho_l a\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_\pi^{2\pi}\hat{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}\phi$$

Ja tässä integraalin voi laskea kirjoittamalla $\hat{\mathbf{r}}$:n x- ja y-suuntaisten yksikkövektoreiden avulla:

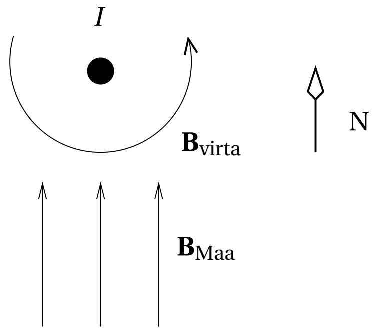
$$\int_\pi^{2\pi}\hat{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}\phi = \int_\pi^{2\pi}(\hat{\mathbf{x}}\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi = \hat{\mathbf{x}}\int_\pi^{2\pi}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi + \hat{\mathbf{y}}\int_\pi^{2\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = 0\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} = -2\hat{\mathbf{y}}$$

eli lopputulos on

$$\mathbf{E}(0) = \hat{\mathbf{y}}\,\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

Yksikkö on V/m, kuten pitääkin (viivavaraustiheyden yksikkö on As/m). Kentän suunta on ilmeinen, poispäin varausviivasta (jos $\rho_l > 0$), ja symmetriasyistä sillä ei voi olla x-komponenttia (eikä myöskään z-komponenttia).

3. Jos kompassin näyttämää halutaan poikkeuttaa koilliseen, täytyy virtalangan magneettikentän osoittaa enimmäkseen itään, eli voidaan panna vaikka lanka pystyyn, vertikaalisesti kuvan mukaan, virta kulkemaan ylöspäin, ja lanka asetetaan kompassin pohjoispuolelle. (On toki muitakin mahdollisuuksia, esimerkiksi lanka pohjois–eteläsuunnassa kompassin yläpuolella. —Ja jos haluaa kompassin näyttämään kokonaan etelään, on virran aiheuttama kenttä asetettava vastakkaiseksi Maan magneettikenttään nähden ja riittävän suureksi.)



Jotta kokonaismagneettikenttä osoittaisi koilliseen, tulisi virran aiheuttaman magneettivuon tiheyden amplitudin olla 15 μT, ja kun se osoittaa itään ja (samansuuruinen) Maan magneettikenttä pohjoiseen, on resultantti koilliseen. Siksipä

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = B_{\text{Maa}}$$

eli

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B_{\text{Maa}}} \approx \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 10\,\text{A}}{2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} = \frac{2}{15}\,\text{m}$$

Siis lanka täytyy tuoda noin 13 senttimetrin päähän kompassista.