1. 1c 2e 3e 4d 5c 6d

2. (a) Lähdepisteestä x-akselin kenttäpisteeseen osoittava paikkavektori on $x\mathbf{u}_x - (a\mathbf{u}_x + a\mathbf{u}_y)$. Siispä sähkökenttä on Coulombin lain mukaan

$$\mathbf{E}(x,0,0) = Q\frac{(x-a)\mathbf{u}_x - a\mathbf{u}_y}{4\pi\varepsilon_0 d^3} \quad \text{missä} \quad d = \sqrt{(x-a)^2 + a^2}$$

(b) Työtä täytyy tehdä silloin kun kahta samanmerkkistä varausta työnnetään toisiaan kohti. Siis alkuun tehty työ on positiivinen (tarvitaan energiaa), kun testivaraus työnnetään origosta akselia pitkin pisteeseen $x = a$. Sitten sama energia vapautuu, kun edetään kohtaan $x = 2a$, ja loppumatkan aikana työ on myös negatiivista. Eli koko matkalta tehtävä nettotyö on negatiivinen.

(c) Tarvittava työ on vastakkaismerkkinen sähköisen voiman tekemään työhön $W_s = \int \mathbf{F}_s \cdot d\ell$ nähden:

$$\begin{aligned} W &= -\int \mathbf{F}_s \cdot d\ell = -Q_t \int_0^\infty \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_x\, dx = -\frac{QQ_t}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{x-a}{(x^2-2ax+2a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{QQ_t}{4\pi\varepsilon_0}\Big|_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-2ax+2a^2}} = -\frac{QQ_t}{4\pi\varepsilon_0\, a\sqrt{2}} < 0 \end{aligned}$$

Potentiaalin kautta sama:

$$W = -Q_t\int_0^\infty \mathbf{E}\cdot d\ell = Q_t\int_0^\infty \nabla\phi\cdot d\ell = Q_t\big(\phi(\infty)-\phi(0)\big) = -\frac{Q_tQ}{4\pi\varepsilon_0\,\sqrt{2}a}$$

koska Q-pistevarauksen potentiaali on $Q/(4\pi\varepsilon_0 d)$.

3. Lasketaan magneettikenttä z-akselilla Biot-Savartin laista

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\ell\times\mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\ell\times\mathbf{r}}{r^3}$$

missä $d\ell$ on differentiaalinen virta-alkio (huomaa, että se on vektori, eli että sillä on suunta) ja $\mathbf{r}$ on vektori virta-alkiosta tarkasteltavaan kenttäpisteeseen z-akselilla.

Nyt on virta-alkio $d\ell = \mathbf{u}_\varphi\, b\, d\phi$ ja vektori $\mathbf{r} = -\mathbf{u}_\rho b + \mathbf{u}_z z$.

Integroidaan pitkin silmukkaa, jolloin saadaan

$$\mathbf{H}(z) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathbf{u}_\varphi\times(-\mathbf{u}_\rho b + \mathbf{u}_z z)}{\left(\sqrt{b^2+z^2}\right)^3} b d\phi = \frac{Ib}{4\pi\left(\sqrt{b^2+z^2}\right)^3}\left(b\mathbf{u}_z\int_0^{2\pi} d\phi + z\int_0^{2\pi}\mathbf{u}_\rho d\phi\right) = \frac{\mathbf{u}_z 2\pi I b^2}{4\pi\left(\sqrt{b^2+z^2}\right)^3}$$

Huomaa, että jälkimmäinen integraali antaa nollan:

$$\int_0^{2\pi}\mathbf{u}_\rho d\phi = \int_0^{2\pi}(\mathbf{u}_x\cos\phi + \mathbf{u}_y\sin\phi)d\phi = 0$$

Siispä magneettivuon tiheys z-akselilla on:

$$\mathbf{B}(z) = \mu_0\mathbf{H}(z) = \mathbf{u}_z\frac{\mu_0 I b^2}{2\left(b^2+z^2\right)^{3/2}}$$

ja kaukana silmukasta ($z \gg b$) se on dipolin kenttä (pienenee etäisyyden käänteisen kolmannen potenssin mukaan):

$$\mathbf{B}(z) \approx \mathbf{u}_z\frac{\mu_0 I b^2}{2z^3}$$