

**TENTTI, DISKREETIN MATEMATIIKAN PERUSTEET,  
MS-A0401**

- **Aika:** 24.10.2019, 9:00 - 12:00
- **Apuvälineet:** Yksi sivu (A4) opiskelijan itse käsin kirjoittamia muistiinpanoja, merkattu opiskelijan nimellä
- Kirjoita eri tehtävien vastaukset eri sivuille. Joka tehtävästä saa maksimissaan 4 pistettä.
- Perustele vastauksesi huolella. Perustelemattomista vastauksista ei saa pisteitä.

TEHTÄVÄ 1

Olkoon  $P||Q$  looginen konnektiivi joka tarkoittaa “ei  $P$  eikä  $Q$ ”. (Eli erityisesti lause  $P||P$  on yhtäpitävä lauseen  $\neg P$  kanssa.)

- Kirjoita lauseen  $P||Q$  totuustaulu. [1p]
- Muodosta lause, joka on loogisesti yhtäpitävä lauseen  $P \vee Q$  kanssa, käyttäen ainoastaan symboleja  $P, Q$  ja  $||$  (sekä sulkeita). [1p]
- Muodosta lause, joka on loogisesti yhtäpitävä lauseen  $P \wedge Q$  kanssa, käyttäen ainoastaan symboleja  $P, Q$  ja  $||$  (sekä sulkeita). [2p]

TEHTÄVÄ 2

Olkoon  $R(x, y)$  relaatio joka pätee jos ja vain jos  $x = y$  tai  $x < 2y$ .

- Onko  $R$  ekvivalenssirelaatio joukossa  $\mathbb{Z}$ ? [1p]
- Onko  $R$  ekvivalenssirelaatio joukossa  $\mathbb{N}$ ? [1p]
- Onko  $R$  järjestysrelaatio joukossa  $\mathbb{Z}$ ? [1p]
- Onko  $R$  järjestysrelaatio joukossa  $\mathbb{N}$ ? [1p]

TEHTÄVÄ 3

Olkoon  $A$  kolmen alkion joukko, ja olkoon  $P(A)$  sen potenssijoukko.

- Mikä on joukon  $P(A)$  mahtavuus? [1p]
- Montako surjektiota on  $P(A) \rightarrow A$ ? [3p]

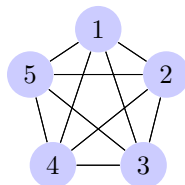
TEHTÄVÄ 4

Tutkitaan permutaatio  $\pi = (156)(2379)(48) \in S_9$ .

- Kirjoita  $\pi$  kaksirivisessä esitysmuodossa. [1p]
- Kirjoita  $\pi$  vaihtojen tulona. [1p]
- Onko  $\pi$  parillinen vai pariton? [1p]
- Kirjoita  $\pi^{-1}$  erillisten syklien tulona. [1p]

TEHTÄVÄ 5

Montako virittäjäpuuta on täydellisessä verkossa  $K_5$ ?



Vihje: Jaa tarkastelu erillisiin tapauksiin puussa olevan pisimmän polun mukaan.

TEHTÄVÄ 6

Olkoon  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  Eulerin funktio. Osoita että jos  $\text{syt}(\varphi(a), \varphi(b)) = 1$ , niin  $\text{syt}(a, b) \leq 2$ .

P | ~~Q~~

a.

| P | Q | P  Q |
|---|---|------|
| T | T | F    |
| T | F | F    |
| F | T | F    |
| F | F | T    |

b.

$$(P||Q) || (P||Q)$$

$$\Downarrow$$
$$\neg(P||Q) \Leftrightarrow P \vee Q$$

c.

$$(P||P) || (Q||Q)$$



$$\neg P || \neg Q \Leftrightarrow P \wedge Q$$

# P2

a) EI  
Ei symmetrinen  
Ei transitivinen  $(R(1,3) \text{ pätee, } R(3,1) \text{ ei päde})$

c) EI  
Ei antisymmetrinen  
Eikä transitivinen  $(R(2,3) \text{ ja } R(3,2) \text{ pätee, } 3 \neq 2.)$

P3

a)  ~~$\sum$~~   $|P(A)| = 2^{|A|} = 8$

b) Incl/Excl tai Stirling's formula:

$$\begin{aligned} 3^8 - \binom{3}{1} \cdot 2^8 + \binom{3}{2} \cdot 1^8 &= 3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = \\ &= 3(3^7 - 2^8 + 1) \\ &= 5796 \end{aligned}$$

0, -

P4

a) 
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 6 & 1 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Esim  $(16)(15)(29)(27)(23)(48)$   
(tarkista muut vastaukset)

c) Parillinen (laske vaihtoja tai ~~syklejä~~  
$$\sum_{\text{syklit}} (\text{pituus} - 1)$$

d)  $(165)(9732)(84)$

# P5

# puita jossa on 2 lehteä

"

# suunnattomita polkuja

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 60$$

(koska 2. # suunnattomita polkuja  
" # suunnattomia polkuja  
" # permutaatioita)



# puita jossa on 3 lehteä:

"

~~5~~  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

(# valitaan ~~solmut~~  
solmut a, b, c  
järjestyksessä)

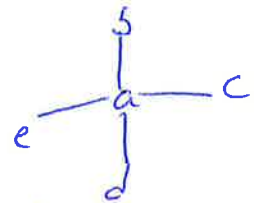


# puita jossa on 4 lehteä:

"

5

(valitaan "keskipiste" a.)



ELi # virittäjäpuuta =  $60 + 60 + 5$   
 $= 125$

# P6

Jos  $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$  ( $p_1 \cdots p_k$  eri alkuluvut)

niin  $\varphi(a) = (p_1 - 1) p_1^{\alpha_1 - 1} \cdots (p_k - 1) p_k^{\alpha_k - 1}$ .

Jos pariton alkuluku  $p$  jakaa  $a$ , niin  $p-1 \mid \varphi(a)$   
eli  $\varphi(a)$  on parillinen.

Jos  $a = 2^\alpha$ , niin  $2^{\alpha-1}$  jakaa  $\varphi(a)$ , joten  $\varphi(a)$   
on parillinen jollei  $\alpha \in \{0, 1\}$ , eli jollei  $a \in \{1, 2\}$ .

~~Eli jos  $\text{syt}(\varphi(a), \varphi(b)) = 1$~~

Jos  $\text{syt}(\varphi(a), \varphi(b)) = 1$ , niin ainakin toinen  
luvuista  $\varphi(a), \varphi(b)$  on pariton, eli ainakin toinen  
luvuista  $a, b$  on joko 1 tai 2.

Siispä  $\text{syt}(a, b) \leq \min(a, b) \leq 2$ .