KJR-C2002 Kontinuumimekaniikan perusteet

Tentti, keskiviikko 12.12.2018, 8:00-12:00

Malliratkaisut

Tässä on annettu mallivastaukset ja joitakin pisteytyksen periaatteita, mutta yksittäisten tenttivastausten kohdalla pisteytysperiaatteita on saatettu soveltaa kokonaisuuden kannalta sopivalla tavalla.

Tehtävä 1. (tot. 6 p)

Vastaa sanallisesti

a) Mitä eroa on Lagrangen ja Eulerin kuvaustavoilla? Anna esimerkki ongelmasta, jossa on käytännöllistä soveltaa Lagrangen kuvaustapaa sekä ongelmasta, jossa on hyvä soveltaa Eulerin kuvaustapaa. (2p)

Vastaus: Vastauksesta pitää tulla ilmi ymmärrys, että Lagrangen kuvaus tarkastelee tiettyä ainepistettä eli partikkelia (partikkelin liikettä). Eulerin kuvaus taas tarkastelee tiettyä kiinteää koordinaatiston pistettä, jonka kautta partikkelit kulkevat. Esimerkiksi: Lagrangen kuvaus tarkastelee palkin keskiviivan ainepisteitä ja niiden siirtymiä, kun taas Eulerin kuvauksella tarkastellaan putken jotain tiettyä poikkileikkausta, jonka läpi aine virtaa (poikkileikkauksen kohdalla on eri ainepartikkeleita eri ajanhetkinä).

1 piste, jos osaa selittää eron ja 1 piste, jos on antanut hyvän esimerkin.

b) Mitä ovat systeemi, kontrollitilavuus ja kontrollipinta? Missä yhteydessä näitä käsitteitä tarvittiin kurssilla? (2p)

Systeemi (niin kuin se tällä kurssilla määriteltiin) on jokin tietty ainemäärä, jota on järkevää tarkastella kokonaisuutena. (Muilla kursseilla on saattanut olla hieman erilaisia tapoja määritellä systeemi, enkä ole sakottanut, jos niitä on käytetty).

Kontrollitilavuus on jokin tilavuus, jonka avulla systeemin tilaa tarkastellaan matemaattisesti. Kurssilla kontrollitilavuus oli aina muuttumaton, mutta joissakin analyyseissa se voi myös muuttua.

Kontrollipinta on kontrollitilavuuden rajaava pinta. Tarkastellaan aineen virtausta kontrollipinnan läpi.

Näitä käsitteitä tarvittiin virtausmekaniikan ongelmien ratkaisussa. Säilymislait esitettiin kontrollitilavuuden avulla kirjoitettuina yhtälöinä.

c) Mitä oletuksia tehtiin Bernoullin palkkiteorian kinematiikan johtamisessa? (2p)

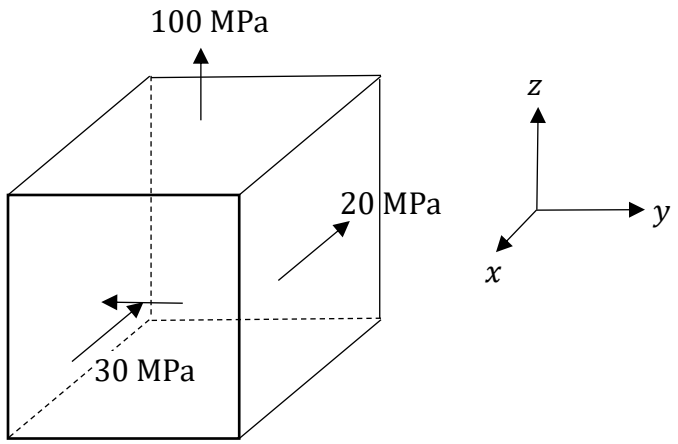
Kinematiikan johtamisessa oletettiin, että palkin paksuuden ja korkeuden suuntaiset viivat pysyvät pituudeltaan muuttumattomina ja kohtisuorina keskiviivaa vastaan. Tästä oletuksesta seuraa, että ainoa venymäkomponentti on ε_{xx}, eli palkin pituuden suuntainen komponentti. Tästä tiedosta annettiin täydet 2 pistettä.

Toki taustalla vaikuttaa myös kaikki kurssin oletukset: aine on jatkuvaa eli kontinuumia, muodonmuutos on lineaaris-elastista, muodonmuutokset ovat pieniä, palkki on hoikka rakenne eli paksuus ja korkeus suhteessa

pituuteen ovat hyvin pieniä (1D). Jos näitä on lueteltu ilman yllä olevia varsinaisia Bernoullin palkkiteorian oletuksia, on tehtävästä yleensä annettu 1 piste.

Tehtävä 2 (tot. 8 p.)

Pisteen jännitystila on kuvan mukainen



a) Kirjoita jännitystensorin komponenttimatriisi. Onko kyseessä tasojännitystila vai 3D-jännitystila? Miksi? (1p)
b) Laske pääjännitykset ja niiden suunnat kuvan jännitystilalle. (6p)
c) Määritä pääjännityksiä vastaavat venymäkomponentit, kun materiaali on terästä (E = 200 GPa ja $\nu = 0.3$) (1p)

Ratkaisu:

a) $[\sigma] = \begin{bmatrix} -30 & -20 & 0 \\ -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$

Kyseessä on 3D-jännitystila, koska tasojännitystilassa pitäisi olla joko $\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$, $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$ tai $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. Tässä tapauksessa $\sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$, mutta $\sigma_{12} \neq 0$.

b) Yhteenveto pisteytyksestä: 2 pistettä pääjännityksistä, 4 pistettä pääjännitysten suunnista. Painotus siihen, että ratkaisu lähtee etenemään oikealla tavalla.

Pääjännitykset saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -30-\lambda & -20 & 0 \\ -20 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 100-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-30-\lambda)\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 100-\lambda \end{vmatrix} - (-20)\begin{vmatrix} -20 & 0 \\ 0 & 100-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-30-\lambda)(-\lambda)(100-\lambda) + 20(-20)(100-\lambda) = 0$$

Otetaan $(100-\lambda)$ yhteiseksi tekijäksi

$$(100-\lambda)((-30-\lambda)(-\lambda) - 20^2) = 0$$

$$\lambda_1 = 100$$

$$\lambda^2 + 30\lambda - 400 = 0$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö ja saadaan loput ominaisarvot

$$\lambda_2 = 10$$

$$\lambda_3 = -40$$

Ominaisarvot: $\lambda_1 = 100, \quad \lambda_2 = 10, \quad \lambda_3 = -40$

Pääjännitykset ovat jännitysmatriisin ominaisarvot. Yleensä suurin pääjännitys on σ_{p1} jne. Siten pääjännitykset ovat:

$$\sigma_{p1} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p2} = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{p3} = -40 \text{ MPa}$$

Pääjännitysten suunnat saadaan, kun lasketaan ominaisvektorit matriisille $[\sigma]$

Ominaisvektorit ratkaistaan yhtälöstä

$$(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Pääjännitystä $\sigma_{p1} = 100$ vastaava ominaisvektori $\hat{\mathbf{x}}^{(p1)}$ saadaan ratkaisemalla

$$\begin{bmatrix} -30-100 & -20 & 0 \\ -20 & 0-100 & 0 \\ 0 & 0 & 100-100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(p1)} \\ x_2^{(p1)} \\ x_3^{(p1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -130 & -20 & 0 \\ -20 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(p1)} \\ x_2^{(p1)} \\ x_3^{(p1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä:

$$-130x_1^{(p1)} - 20x_2^{(p1)} = 0$$

$$-20x_1^{(p1)} - 100x_2^{(p1)} = 0$$

Edellinen on tosi vain, jos $x_1^{(p1)} = x_2^{(p1)} = 0$. Jotta ominaisvektorin pituus olisi 1, on oltava

$$(x_1^{(p1)})^2 + (x_2^{(p1)})^2 + (x_3^{(p1)})^2 = 1$$

mistä seuraa:

$$x_3^{(p1)} = \pm 1$$

Siten vektori $\hat{\mathbf{x}}^{(p1)} = \pm \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ on Pääjännitystä $\sigma_{p1} = 100$ vastaava ominaisvektori.

Pääjännitystä $\sigma_{p2} = 10$ vastaava ominaisvektori $\hat{\mathbf{x}}^{(p2)}$ saadaan ratkaisemalla

$$\begin{bmatrix} -30-10 & -20 & 0 \\ -20 & 0-10 & 0 \\ 0 & 0 & 100-10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(p2)} \\ x_2^{(p2)} \\ x_3^{(p2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -40 & -20 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(p2)} \\ x_2^{(p2)} \\ x_3^{(p2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä:

$$-40x_1^{(p2)} - 20x_2^{(p2)} = 0$$

$$-20x_1^{(p2)} - 10x_2^{(p2)} = 0$$

$$90x_3^{(p2)} = 0$$

Yhtälöistä saadaan $x_2^{(p2)} = -2x_1^{(p2)}$ ja $x_3^{(p2)} = 0$

Jotta ominaisvektorin pituus olisi 1, on oltava

$$(x_1^{(p2)})^2 + (x_2^{(p2)})^2 + (x_3^{(p2)})^2 = 1$$

mistä seuraa:

$$(x_1^{(p2)})^2 + (-2x_1^{(p2)})^2 = 1$$

$$x_1^{(p2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Siten vektori $\hat{\mathbf{x}}^{(p2)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix}1\\-2\\0\end{Bmatrix}$ on pääjännitystä $\sigma_{p2} = 10$ MPa vastaava ominaisvektori.

Huomaa, että olisi myös sallittua valita komponenteille $x_1^{(p2)}$ ja $x_2^{(p2)}$ sopivat arvot, esimerkiksi $x_1^{(p2)} = 1$, jolloin ominaisvektori $\mathbf{x}^{(p2)} = \begin{Bmatrix}1\\-2\\0\end{Bmatrix}$. Tämä on myös oikein, vaikka ei olekaan yksikkövektori.
Yksikkövektorin normeeraus ei ole välttämätöntä, vaan sen voi laskea kahdella eri tavalla. Tehdään tässä malliratkaisussa kuitenkin normeeraus.

Pääjännitystä $\sigma_{p3} = -40$ vastaava ominaisvektori $\hat{\mathbf{x}}^{(p3)}$ saadaan ratkaisemalla

$$\begin{bmatrix}-30-(-40) & -20 & 0\\ -20 & 0+40 & 0\\ 0 & 0 & 100+40\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1^{(p3)}\\x_2^{(p3)}\\x_3^{(p3)}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10 & -20 & 0\\ -20 & 40 & 0\\ 0 & 0 & 140\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1^{(p3)}\\x_2^{(p3)}\\x_3^{(p3)}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä:

$$10x_1^{(p3)} - 20x_2^{(p3)} = 0$$

$$-20x_1^{(p3)} + 40x_2^{(p3)} = 0$$

$$140x_3^{(p3)} = 0$$

Yhtälöistä saadaan $x_1^{(p3)} = 2x_2^{(p3)}$ ja $x_3^{(p3)} = 0$

Jotta ominaisvektorin pituus olisi 1, on oltava

$$(x_1^{(p3)})^2 + (x_2^{(p3)})^2 + (x_3^{(p3)})^2 = 1$$

mistä seuraa:

$$(2x_2^{(p3)})^2 + (x_2^{(p3)})^2 = 1$$

$$x_2^{(p3)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Siten vektori $\hat{\mathbf{x}}^{(p3)} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix}2\\1\\0\end{Bmatrix}$ on pääjännitystä $\sigma_{p3} = -40$ MPa vastaava ominaisvektori.

c) Venymät saadaan yleistetystä Hooken laista:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})]$$
$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]$$

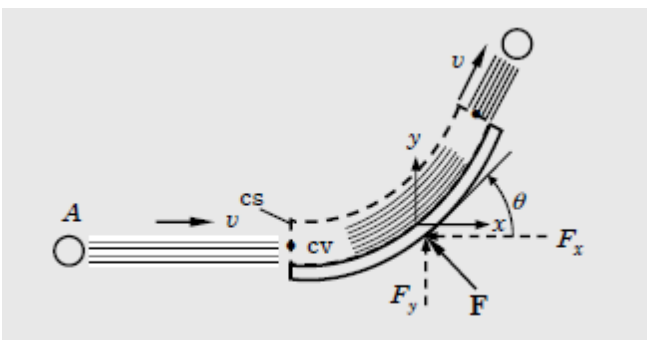
Sijoitetaan numeroarvot:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{200 * 10^3}[100 - 0{,}3(10 - 40)] = 5{,}45 * 10^{-4}$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{200 * 10^3}[10 - 0{,}3(-40 + 100)] = -4{,}00 * 10^{-4}$$
$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{200 * 10^3}[-40 - 0{,}3(100 + 10)] = -3{,}65 * 10^{-4}$$

Liukumat $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, koska pääjännitysten yhteydessä leikkausjännitykset ovat nollia.

Tehtävä 3 (tot. 4 p.)

Vesisuihku ($\rho = 10^3 \mathrm{kg/m^3}$) iskeytyy sileään käyrään siipeen nopeudella v = 60 m/s. Iskun seurauksena virtaussuihku muuttaa suuntaa siiven tangentin suuntaisesti, kuten kuvassa on esitetty. Virtaussuihkun nopeus ja poikkipinta-ala sekä paine pysyvät vakiona. Mikä on siipeä paikallaan pitävä voima? Laske voiman komponenttien suuruudet, kun tilavuusvirta on Q = 0,080 m^3/s ja kulma $\theta = 60°$. Virtaus on tasaista eli ajasta riippumatonta.



Ratkaisu:

Tehtävä ratkeaa hyödyntämällä liikemäärän säilymislain kontrollitilavuusmuotoa. Tehtävän tilanne voidaan mallintaa kontrollitilavuutena, jossa on yksi sisäänmeno- ja yksi ulostulokohta. Reynoldsin kuljetuslauseeseen sijoitetaan liikemäärä ja saadaan

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho \mathbf{v} d\mathbf{x} + (\rho \mathbf{v} v A)_{out} - (\rho \mathbf{v} v A)_{in} = \mathbf{F}$$

Kontrollitilavuus, kontrollipinta ja koordinaatisto on annettu kuvassa.

Tehtävänannon perusteella tiedetään, että kyseessä on tasainen (ajasta riippumaton) virtaus, joten liikemäärän säilymislain kontrollitilavuusmuodon ajasta riippuva termi on nolla:

$$(\rho \mathbf{v} vA)_{out} - (\rho \mathbf{v} vA)_{in} = \mathbf{F}$$

Tiheys on vakio ja massan säilymislain mukaan

$$(vA)_{out} = (vA)_{in} = vA = Q$$

Liikemäärän säilymislain kontrollitilavuusmuodosta saadaan jakamalla ulos menevän virtauksen nopeusvektorit komponentteihinsa:

$$\rho Q(v\cos(60°)\hat{\mathbf{e}}_x + v\sin(60°)\hat{\mathbf{e}}_y) - \rho Q(v\hat{\mathbf{e}}_x) = -F_x\hat{\mathbf{e}}_x + F_y\hat{\mathbf{e}}_y$$

Tarkastellaan komponenteittain

$$\rho vQ\cos(60°) - \rho vQ = -F_x$$

$$\rho vQ\sin(60°) = F_y$$

Sijoitetaan numeroarvot

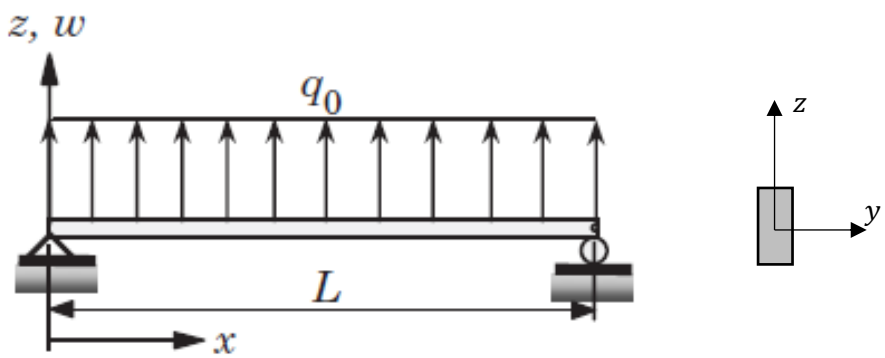
$$F_x = 1000\text{kg/m}^3(60\text{m/s})(0,08\text{m}^3/\text{s})(1\text{-}\cos(60°)) = 2400\text{N}$$

$$F_y = 1000\text{kg/m}^3(60\text{m/s})(0,08\text{m}^3/\text{s})\sin(60°) = 4157\ \text{N}$$

Tehtävä 4 (tot. 6 p.)

Kuvan vapaasti tuetulle Euler-Bernoulli -palkille on annettu taivutusmomentin ja taipuman lausekkeet, kun yläpinnan jakautunut voima on vakio q_0 ja *EI* on vakio.

a) Ratkaise taivutusmomentin ja taipuman lausekkeet, eli ratkaise integroimisvakiot C_i sopivien reunaehtojen avulla. (2p)
b) Ratkaise venymän ja jännityksen lausekkeet ε_{xx} ja σ_{xx}. (2p)
c) Määritä maksimivenymä ja maksimijännitys. Määritä ensin palkin poikkileikkaus, jossa maksimivenymä ja jännitys esiintyvät, sitten poikkileikkauksen kohta, jossa venymä ja jännitys saavat suurimman ja pienimmän arvonsa. (2p)



$$M(x) = -\frac{q_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2\,, \qquad w(x) = \frac{q_0 x^4}{24EI} - \frac{q_0 L x^3}{12EI} + C_3 x + C_4$$

Ratkaisu:

a) Reunaehdot ovat:

$w(0) = 0, \qquad M(0) = 0, \qquad w(L) = 0, \qquad M(L) = 0$

Sijoitetaan reunaehdot taivutusmomentin ja taipuman lausekkeisiin ja ratkaistaan integroimisvakiot

1. $w(0) = 0 \;\rightarrow\; C_4 = 0$

2. $M(0) = 0 \;\rightarrow\; C_2 = 0$

3. $M(L) = 0 \;\rightarrow\; -\frac{q_0 L^2}{2} + C_1 L = 0 \;\rightarrow\; C_1 = \frac{q_0 L}{2}$

4. $w(L) = 0 \;\rightarrow\; \frac{q_0 L^4}{24EI} - \frac{q_0 L (L^3)}{12EI} + C_3 L = 0 \;\rightarrow C_3 = \frac{q_0 L^3}{24EI}$

b) Venymä on Bernoullin palkkiteorian mukaan

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Sijoitetaan taipuman lauseke

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{q_0 x^4}{24EI} - \frac{q_0 L x^3}{12EI} + \frac{q_0 L^3}{24EI}x\right) = -z(\frac{q_0 x^2}{2EI} - \frac{q_0 L x}{2EI})$$

Jännitys on Hooken lain mukaan

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

Sijoitetaan venymän lauseke

$$\sigma_{xx} = -z(\frac{q_0 x^2}{2I} - \frac{q_0 L x}{2I})$$

c) Maksimijännitys (ja venymä) sijaitsevat palkin keskikohdan poikkileikkauksessa, mikä voidaan todeta venymän tai taivutusmomentin derivaatan nollakohdasta.

$$\frac{d}{dx}M(x) = -q_0 x + \frac{q_0 L}{2} = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

Maksimivenymä on

$$\varepsilon_{xx,max} = -z\left(\frac{q_0\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} - \frac{q_0 L\left(\frac{L}{2}\right)}{2EI}\right) = z\frac{q_0 L^2}{8EI}$$

Venymä muuttuu lineaarisesti koordinaatin z funktiona. Kun jakaantunut kuorma q_0 vaikuttaa kuvan mukaisesti positiivisen z-akselin suuntaan, venymä palkin poikkileikkauksen yläreunalla on positiivinen ja alareunalla vastaavasti negatiivinen. Palkin keskiviivalla venymä on nolla.

Maksimijännitys on

$$\sigma_{xx,max} = E\varepsilon_{xx,max} = z\frac{q_0 L^2}{8I}$$