Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (TFM) Alestalo
MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (SCI) Korte
MS-A0107 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (CHEM) Alestalo

Kurssitentti ja yleinen tentti 12.12.2019 klo 9.00–12.00.

Vastauspaperit palautetaan koodeittain eri kasoihin.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Kaikki II-periodin luentokurssille (CHEM/SCI) osallistuneet voivat siis halutessaan laskea kuusi tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää". Tämä koskee myös I-periodin 2019 TFM-kurssin opiskelijoita.
Jos sinulla on laskaripisteitä TFM-kurssilta I/2019, niin kirjoita kohtaan Lisätietoja "+ laskaripisteet".

1. a) Määritä sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} x^{2k}$$

summa. Millä muuttujan x arvoilla saatu kaava on voimassa?
b) Millä muuttujan x arvoilla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^k} x^k$$

suppenee?

2. a) Muodosta funktion $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$ kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x)$.
Huom: Maclaurin-polynomi = Taylor-polynomi pisteen $x_0 = 0$ suhteen.
b) Laske (esimerkiksi L'Hospitalin säännön avulla) raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 5x^2)}{x^2}.$$

3. Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 4x + 3$.
a) Osoita, että f on aidosti kasvava. Tästä seuraa, että sillä on käänteisfunktio f^{-1}, mutta tarkempaa perustelua ei vaadita. (2 p.)
b) Laske $(f^{-1})'(3)$. (4 p.)

4. a) Laske osittaisintegrointia käyttämällä integraali

$$\int_1^2 x \cos(\pi x)\, dx.$$

b) Laske sijoituksen $x = t^2$ avulla määrätty integraali

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + x}.$$

5. a) Nolla-asteiseen ulkoilmaan tuotiin astia, jossa olevan veden lämpötila $T = T(t)$ hetkellä $t = 0$ (minuuttia) oli 20 astetta. Oletetaan, että veden jäähtyminen noudatti Newtonin jäähtymislakia $T' = -kT$, jossa $k > 0$ on vakio. Määritä vakion k tarkka arvo, kun mittaamalla saatiin $T(5) = 15$ astetta.
b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2y + 6$ alkuehdolla $y(0) = 1$.

6. Määritä differentiaaliyhtälölle $y'' + 3y' - 4y = 0$ sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 10$.

Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja ja Taylor-/Maclaurin approksimaatioita:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
D \tan x &= 1 + \tan^2 x \\
D \arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\
D \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
\ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \\
\sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
\cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen! (Tämä ei koske yleisiä tenttejä eikä I-periodin kurssitentin uusintaa.)

Huom. 2: MS-A0102- ja MS-A0107-kurssitentin voi uusia III-periodin tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**