

ELEC-C7220 Informaatioteoria

1. (9p.) Entropia. Laatikossa on kaksi noppaa, yksi kuusisivuinen noppa N ja yksi kaksitoistasivuinen noppa M (kuva 1).



Kuva 1: Kaksi noppaa

Poimitaan satunnaisesti noppa laatikosta ja heitetään sitä kerran. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kertoo valitun nopan (N tai M). Olkoon Y muuttuja joka kertoo onko heiton tulos ≤ 4 (arvo A) vai > 4 (arvo B) ja Z muuttuja joka kertoo onko heiton tulos parillinen (arvo P) vai pariton (arvo T).

- Mikä on todennäköisyys, että heiton tulos on 10?
 - Laske $H(X, Y)$.
 - Laske $H(Z|X)$.
 - Laske $I(Y; Z)$.
 - Mitkä muuttujapareista $X \leftrightarrow Y$, $X \leftrightarrow Z$, $Y \leftrightarrow Z$ ovat riippuvia ja mitkä riippumattomia? Perustelee.
2. (3p.) Kaavat.
- Esitä kaava, josta käy ilmi seuraavien arvojen suhde toisiinsa: $I(X; Y)$, $H(X)$ ja $H(X|Y)$.
 - Mikä on symmetrisen binäärikanavan (BSC) kapasiteetti kun vaihtotodennäköisyys (crossover probability) on p ?
 - Tarkastellaan kaistarajoitettua Gaussin kanavaa, jossa signaalin teho on P , kohinan teho on N ja kaistanleveys on W . Mikä on tämän kanavan kapasiteetti näiden suureiden funktiona?

JATKUU SEURAAVALLA SIVULLA

3. (6p.) Kanavan kapasiteetti. Mitkä ovat seuraavien kanavien kapasiteetit? Perusteluja ei tarvita.

Vihje: Z-kanava on kanava, jonka siirtymätodennäköisyydet ovat

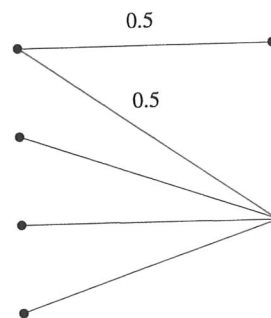
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{bmatrix}.$$

Z-kanavan kapasiteetti on $\log_2 (1 + (1-p)p^{p/(1-p)})$ bittia per lähetyskerta.

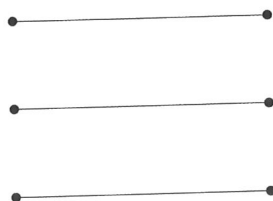
a)



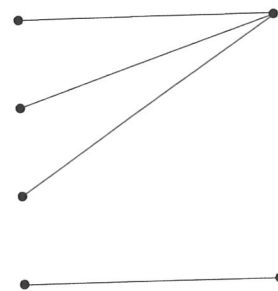
b)



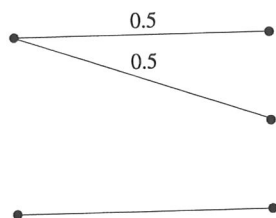
c)



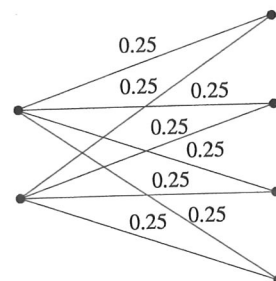
d)



e)



f)



JATKUU SEURAAVALLA SIVULLA

4. (6p.) Lähde- ja kanavakoodaus.

- (a) Löytyykö välitön ternäärikoodi (siis aakkoston koko $q = 3$), jonka sanojen pituudet ovat 3,1,2,3,2,1,3? Jos koodi on olemassa, esitä sellaisen koodin koodisanat, muuten perustele/todista miksi se ei voi olla olemassa.
- (b) Teemu ja Tarja keksivät ovelan (kielletyn...) tavan viestittää tenttitilaisuuden aikana. Teemu istuu Tarjan takana ja näkee Tarjan pöydällä makaavat kädet. Nostamalla ja laskemalla käsien etusormia saadaan nyt yksisuuntainen tiedonsiirtokanava aikaiseksi (mahdolliset tilat ovat siis sormi ylhäällä ja sormi alhaalla). Esitä miten tätä kanavaa voidaan käyttää tehokkaasti numeeristen vastausten lähettämiseen. Esitä koodaus yksityiskohtaisesti ja kerro miten voidaan lähettää seuraava viesti (tehtävän numero + vastaus):

2. 34,3

Arvioi myös kyseisen menetelmän nopeutta käytännössä, bitteinä sekunnissa. Jos menetelmää muokataan niin, että sillä voidaan lähettää tekstejä, ja tekstin entropianopeus on 1,3 bittiä/kirjain, mihin nopeuksiin (kirjainta/minuutti) arvioit, että voidaan päästä?

5. **Bonustehtävä** (2p.) Stanfordin yliopiston välikokeesta. Tästä tehtävästä saa pisteet vain täysin oikeasta vastauksesta.

Olkoot Z_1, Z_2, \dots, Z_n i.i.d. satunnaismuuttujia, jotka saavat arvon 0 tai 1 yhtä suurella todennäköisyydellä. Määritellään

$$X_i = \sum_{j=1}^i Z_j, \text{ kun } 1 \leq i \leq n.$$

Laske $I(X_1; X_2, X_3, \dots, X_n)$.

