

Tentissä saa käyttää ylioppilastutkintolautakunnan hyväksymää **laskinta** ja a4-kokoista **muistiinpanolappua**. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla oma nimi ja opiskelijanumero. Muistiinpanolappua ei tarvitse palauttaa. Tentissä on 4 tehtävää, kukin arvoltaan 0–6 pistettä.

1. Muropakettien mukana aletaan jaella keräilykortteja, joita on viittä eri tyyppiä. Homer haluaa kerätä kokoelman, jossa on vähintään yksi kortti kutakin tyyppiä. Kunkin muropaketin sisällä on yksi kortti, jonka tyyppi noudattaa tasajakaumaa ja on muiden muropakettien sisällöistä riippumaton. Merkitään X_t :llä erityyppisten korttien lukumäärää Homerin kokoelmassa t :n muropaketin avaamisen jälkeen.

- (a) (X_t) on Markov-ketju. Määritä sen tilajoukko, siirtymämatriisi ja siirtymäkaavio. (2 p)
- (b) Määritä satunnaismuuttujan $T_2 = \min\{t \geq 0 : X_t = 2\}$ jakauma. (1 p)
- (c) Laske satunnaismuuttujan T_2 odotusarvo. (1 p)
- (d) Kuinka monta muropakettia Homerin pitää odotusarvoisesti avata päästäkseen tavoitteeseensa? (2 p)

2. Olkoon (X_0, X_1, X_2, \dots) diskreettiaikainen Markov-ketju, jonka alkujakauma on tilajoukon $\{1, 2, 3\}$ tasajakauma, ja siirtymämatriisi on

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mitkä seuraavista ovat Markov-ketjuja? Niille, jotka ovat Markov-ketjuja, määritä tilajoukko ja siirtymämatriisi. Niille, jotka eivät ole, perustele miksi.

- (a) $A_t = 2X_t$, (1.5 p)
- (b) $B_t = X_{2t}$, (1.5 p)
- (c) $C_t = X_{t \wedge T}$, missä $T = \min\{t \geq 0 : X_t = 3\}$ ja $s \wedge t$ on lukujen s ja t minimi. (1.5 p)
- (d) $D_t = \min(X_t, 2)$. (1.5 p)

3. Kirjastossa on kaksi kappaletta Olav Kallenbergin klassista oppikirjaa. Kirjaa lainakseen haluavia ihmisiä saapuu kirjastoon satunnaisina ajanhetkinä keskivauhtia 0.4 per päivä. Mikäli kirjaa on saapumishetkellä saatavilla, saapuva henkilö lainaa kirjan satunnaisesti ajaksi, odotusarvona 10 päivää. Muussa tapauksessa henkilö poistuu lainaamaan jotain vähemmän kiinnostavaa lukemista. Kirjasto on auki 24 tuntia päivässä ja 7 päivää viikossa. Saapumisten väliajat ja lainausajat ovat keskenään riippumattomia ja eksponenttijakautuneita.

- (a) Olkoon X_t lainassa olevien kappaleiden lukumäärä ajanhetkellä t . Tällöin (X_t) on Markov-prosessi. Määritä sen tilajoukko, siirtymäkaavio ja generaattorimatriisi. (2 p)
- (b) Mikä on tasapainotilassa todennäköisyys sille, että kirjaa on saatavilla? (2 p)
- (c) Miten laskisit tietokoneen avulla ehdollisen todennäköisyyden sille, että molemmat teoksen kappaleet ovat lainassa 3 päivän kuluttua, kun ne ovat lainassa nyt? (1 p)
- (d) Jos molemmat kappaleet ovat nyt lainassa, niin millä todennäköisyydellä vähintään yksi henkilö saapuu lainaamaan kirjaa ennen kuin kumpaakaan kappaleista on palautettu? (1 p)

4. Kuvitteellinen lintulaji lisääntyy seuraavasti. Yksilö munii elämänsä aikana kaksi munaa, joista kustakin kuoriutuu uusi lintu todennäköisyydellä $2/3$ — muista riippumattomasti. Ensimmäisessä sukupolvessa on kolme lintua.

- (a) Millä todennäköisyydellä kolmannessa sukupolvessa ei ole yhtään lintua? (2 p)
- (b) Millä todennäköisyydellä lintulaji kuolee lopulta sukupuuttoon? (2 p)
- (c) Määritä sellainen vakio r , jolle $r^{-t}X_t$ on martingaali, missä X_t on t :nnen sukupolven koko. (2 p)

$$P(X \leq x) = F(x)$$