Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Gutiérrez

MS-C1540 Euklidiset avaruudet

Kurssitentti ja yleinen tentti 18.2.2019 klo 13–16.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. a) Olkoon E reaalinen sisätuloavaruus ja $a \in E$ jokin piste. Määritellään funktio $f\colon E \to \mathbf{R}$ kaavalla $f(x) = \langle x, a\rangle$, kun $x \in E$. Osoita, että f toteuttaa Lipschitz-ehdon

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|, \ x, y \in E,$$

jollakin vakiolla $L \geq 0$: millä?
b) Millainen metriikan ominaisuus seuraa normin (N2)-ehdosta $\|cx\| = |c|\,\|x\|$, jos vektoriavaruuden V metriikka d indusoituu jostakin normista?
c) Toteuttaako tehtävän 3 metriikka b-kohdan ominaisuuden?
Huom: Tämän tehtävän voi valita tehtävästä 3 riippumatta. Metriikan ehtojen tarkistaminen kuuluu ainoastaan tehtävään 3.

2. Olkoot f ja g jatkuvia funktioita $[0,1] \to \mathbf{R}$. Osoita jatkuvuuden $\varepsilon - \delta$-määritelmää käyttämällä, että niiden tulo

$$fg\colon [0,1] \to \mathbf{R}, \ (fg)(x) = f(x)g(x), \ \text{kun } x \in [0,1],$$

on jatkuva.
Vihje: Oletetaan tunnetuksi, että on olemassa vakio $C > 0$, jolle $|f(x)| \leq C$ ja $|g(x)| \leq C$ kaikilla $x \in [0,1]$. Kaavasta $f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x)g(x) - f(x)g(a)) + (f(x)g(a) - f(a)g(a))$ lienee hyötyä, kun $a \in [0,1]$ on tutkittava piste.

3. Olkoon

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \ \text{kun } x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Osoita, että d on metriikka reaalilukujen joukossa $\mathbf{R}$.
b) Määritä joukon $A = [1,10]$ läpimitta $d(A) = \operatorname{diam}(A)$ metriikassa d.

4. Esitä seuraavien käsitteiden määritelmät (tai jokin yhtäpitävä ehto) metrisessä avaruudessa (X,d):
a) avoin joukko $U \subset X$;
b) suljettu joukko $F \subset X$;
c) joukon $A \subset X$ reuna;
d) joukon $A \subset X$ sulkeuma;
e) rajoitettu joukko $A \subset X$;
f) joukkojen $A, B \subset X$ välinen etäisyys.

5. Olkoon $f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{nx^2+1}, \ x \in \mathbf{R},$$

kun $n \in \mathbf{N}$.
a) Määritä funktiojonon (f_n) pisteittäinen rajafunktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ x \in \mathbf{R}.$$

b) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$ kohti funktiota f?
c) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti joukossa $[1,\infty[$ kohti funktiota f?

Vihjeenä funktion f_5 kuvaajan osa: 

6. a) Olkoon $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ jatkuva ja X kompakti. Osoita, että kuvajoukko $f[X] \subset Y$ on kompakti.
b) Olkoon $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ jatkuva ja X yhtenäinen. Osoita, että kuvajoukko $f[X] \subset Y$ on yhtenäinen.

Huom. 1: Kurssitentin voi uusia seuraavan yleisen tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.
Huom. 2: Palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

18.2.2019 RATKAISUT

1. a)

$$|f(x)-f(y)| = |\langle x,a\rangle - \langle y,a\rangle| = |\langle x-y,a\rangle|$$

$$\leq \|x-y\|\cdot\|a\| = \|a\|\cdot\|x-y\| \quad \text{(SCHWARZ-EY)}$$

$\Rightarrow L = \|a\|$ KÄY.

b) $d(cx,cy) = \|cx-cy\| = \|c\cdot(x-y)\| = |c|\cdot\|x-y\|, \quad c\in\mathbb{R}$

c) $d(cx,cy) = \sqrt{|cx-cy|} = \sqrt{|c|\cdot|x-y|} = \sqrt{|c|}\sqrt{|x-y|}$

$$= \sqrt{|c|}\,d(x,y) \Rightarrow \text{EI TOTEUTA}$$

---

2. IDEA: $|f(x)g(x)-f(a)g(a)| \leq |f(x)g(x)-f(x)g(a)| + |f(x)g(a)-f(a)g(a)|$

$$= |f(x)|\cdot|g(x)-g(a)| + |g(a)|\cdot|f(x)-f(a)|$$

$$\leq C\,|g(x)-g(a)| + C\,|f(x)-f(a)|$$

OLKOON $\varepsilon>0$. VALITAAN $\delta_1>0$ S.E. $|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2C}$, KUN $|x-a|<\delta_1$

VALITAAN $\delta_2>0$ S.E. $|g(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2C}$, KUN $|x-a|<\delta_2$

JOS NYT $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, NIIN

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x)-f(a)g(a)| < C\cdot\frac{\varepsilon}{2C} + C\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

---

3. a) $d(x,y)\geq 0 \ \forall x,y\in\mathbb{R}$

(M1) JOS $a,b\geq 0$, NIIN $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (SYY: NELIÖÖNKOROTUS)

$$\Rightarrow d(x,y) = \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|+|z-y|} \leq \sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|}$$

$$= d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}$$

(M2) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d(y,x) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

(M3) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-y|}=0 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

b) $d(A) = \sup\{\sqrt{|x-y|} \mid 1\leq x,y\leq 10\} = \sqrt{10-1} = \underline{3}$

4. KATSO LUENNOT

6. KATSO LUENNOT (MOLEMMISSA MONTA ERI TAPAA)

5. a) $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 1$

JOS $x \neq 0$, NIIN $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\Rightarrow f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

b) f EPÄJATKUVA, f_n JATKUVIA $\Rightarrow$ EI SUPPENE TASAISESTI

(TAI SUORAAN MÄÄRITELMÄN AVULLA $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

c) JOS $x \geq 1$, NIIN

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{nx^2+1} - 0 \right| = \frac{1}{nx^2+1} \leq \frac{1}{n\cdot 1^2+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| \underset{\text{ITSE ASIASSA } =}{\leq} \frac{1}{n+1} \to 0, \text{ KUN } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ SUPPENEE TASAISESTI JOUKOSSA $x \geq 1$.