Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Kuznetsova
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0204 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

Kurssitentti ja yleinen tentti 17.2.2020 klo 9.00–12.00.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Parametrisoidun tasokäyrän $x = x(t)$, $y = y(t)$ kaarevuus määritellään kaavalla

$$K(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}},$$

ja sen kaarevuussäde on $R(t) = 1/|K(t)|$. (Perustelu: Diff-int-3)
a) Muodosta R-säteisen ympyrän parametrisointi ja osoita, että sen kaarevuusäde on vakio.
b) Muodosta paraabelin kaaren $y = x^2$ parametrisointi ja laske paraabelin kaarevuussäde origossa $(0, 0)$.

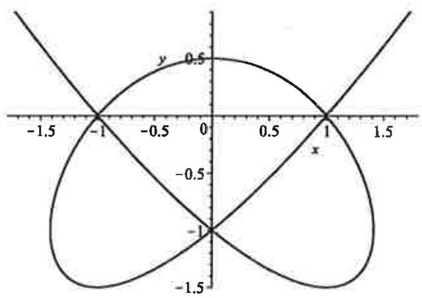
2. Tutkitaan alla olevan kuvion "solmukäyrää"

$$g(x, y) = (x^2 - 1)^2 - y^2(3 + 2y) = 0.$$

Kuviosta voi katsoa vihjeitä, mutta vastaukset täytyy perustella laskemalla.
a) Osoita, että piste $(0, 1/2)$ toteuttaa käyrän yhtälön, ja perustele gradientin tai implisiittisen derivoinnin avulla, että käyrän tangentti on tässä pisteessä vaakasuora.
b) Kuvion perusteella käyrä leikkaa itseään kolmessa pisteessä, joka on mahdollista vain silloin, kun

$$\begin{cases} \nabla g = \overline{0} \\ g = 0. \end{cases}$$

Määritä nämä pisteet ratkaisemalla tämä yhtälöryhmä.



3. Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2t(xy + yz + xz),$$

kun $t \in \mathbf{R}$ on parametri.
a) Osoita, että funktiolla f on kriittinen piste origossa.
b) Määritä funktion f Hessen matriisi $H_f(0,0,0)$.
c) Matriisin $H_f(0,0,0)$ ominaisarvot ovat $1+2t$ ja $1-t$ (kaksinkertainen). Millä parametrin t arvoilla funktiolla f on paikallinen minimi kohdassa $(0,0,0)$? Vastaukseksi riittää avoin väli, jonka päätepisteitä ei tarvitse tutkia.

4. Määritä tason $z = 2x + y - 12$ pienin etäisyys origosta tutkimalla etäisyyden neliön $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ääriarvoja ehdolla

$$g(x,y,z) = 2x + y - z - 12 = 0.$$

5. Laske paraabelin $y = 4 - x^2$ ja x-akselin rajaaman (rajoitetun) tasoalueen P pinta-ala A ja keskiön y-koordinaatti

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint_P y\,dA.$$

6. **Jos valitset (kurssitenttiin) tämän tehtävän, niin riittää laskea a- tai b-kohta. Jos välttämättä haluat laskea molemmat kohdat, niin paremmat pisteet jäävät voimaan.**
a) Satunnaismuuttujan X arvo on yksikkökiekosta

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

satunnaisesti valitun (ts. tiheysfunktio = vakio = $1/A = 1/\pi$) pisteen etäisyys origosta. Laske sen odotusarvo

$$EX = \frac{1}{A}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

integroimalla napakoordinaatistossa.
b) Satunnaismuuttujan Y arvo on yksikköpallosta

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

satunnaisesti valitun (ts. tiheysfunktio = vakio = $1/V = 3/(4\pi)$) pisteen etäisyys origosta. Laske sen odotusarvo

$$EY = \frac{1}{V}\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$

integroimalla pallokoordinaatistossa, kun tunnetaan tilavuuden paikallinen suurennussuhde $r^2 \sin\varphi$.

Huom. 1: Palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet otetaan huomioon ja parempi tulos jää voimaan. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.