K Kytölä & A Gutiérrez

T0 Euklidiset avaruudet, tentti 20.2.2020

Tässä tenttitilaisuudessa voi suorittaa joko kurssitentin (KT) tai tentin (T0).

- Kurssitenttiin (KT) kuuluu tehtävät 1–4 (**T0-1**, **T0-2**, **T0-3**, **T0-4**).
- Tenttiin (T0) kuuluu kaikki tehtävät 1–5 (**T0-1**, **T0-2**, **T0-3**, **T0-4**, **T0-5**).
- Opiskelijoiden, jotka ovat ilmoittautuneet kursseille MS-C1540 ja MS-C1081 periodissa III ja jotka suorittavat molemmat tentit samalla, riittää tehdä tehtävät 1–3 (**T0-1**, **T0-2**, **T0-3**).

Tentissä saa käyttää A4-kokoista muistiinpanolappua. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla opiskelijan nimi ja opiskelijanumero. Muistiinpanolapun saa ottaa mukaansa tentin jälkeen.

Tehtävät

T0-1 Olkoon $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq \exp(\sin(\pi x)) \text{ ja } \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 5 \right\}$.

(a) Osoita, että joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu. **(2 p)**

Ratkaisu. Jos $(x,y) \in A$ on joukon piste, on jälkimmäisen ehdon nojalla voimassa

$$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 5.$$

Koska molemmat termit ovat epänegatiivisia, tästä seuraa ensinnäkin

$$y^2 \leq 5 - \frac{x^2}{2} \leq 5 \qquad \text{ja} \qquad x^2 \leq 10 - 2y^2 \leq 10$$

ja siten erityisesti

$$x^2 + y^2 \leq 15.$$

Euklidisen etäisyyden määritelmästä, ylläolevasta epäyhtälöstä, ja neliöjuurifunktion kasvavuudesta (säilyttää epäyhtälön suunnan) seuraa siksi

$$d\big((0,0),(x,y)\big) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \leq \sqrt{15}$$

(joukko A siis sisältyy origokeskiseen $\sqrt{15}$-säteiseen suljettuun kuulaan). Kun (x,y), $(x',y') \in A$ ovat kaksi joukon A pistettä, saadaan kolmioepäyhtälöstä

$$d\big((x',y'),(x,y)\big) \leq d\big((x',y'),(0,0)\big) + d\big((0,0),(x,y)\big) \leq \sqrt{15} + \sqrt{15} = 2\sqrt{15}.$$

Suoraan läpimitan määritelmästä seuraa silloin, että $\operatorname{diam}(A) \leq 2\sqrt{15}$. Tämän läpimitan äärellisyys näyttää (määritelmän mukaan), että joukko A on rajoitettu.

(b) Osoita, että $A \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu osajoukko. **(2 p)**

Ratkaisu. Kahden samanaikaisesti vaaditun ehdon määrittelemä joukko

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq \exp(\sin(\pi x)) \text{ ja } \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 5 \right\}$$

voidaan ilmaista kahden joukon leikkauksena

$$A = A_1 \cap A_2,$$

missä

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq \exp(\sin(\pi x)) \right\}$$
$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 5 \right\}.$$

Määritellään funktiot

$$f_1 \colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad f_1(x, y) = y - \exp(\sin(\pi x))$$
$$f_2 \colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad f_2(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2,$$

jolloin joukot A_1 ja A_2 voidaan lausua alkukuvina

$$A_1 = f_1^{-1}\big[[0, +\infty)\big] \qquad \text{ja} \qquad A_2 = f_2^{-1}\big[(-\infty, 5]\big].$$

Molemmat funktioista f_1, f_2 ovat jatkuvia (pisteittäisinä summina funktioista, jotka on saatu yhdistämällä projektiokuvauksia $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, vakiolla kertomista, eksponenttifunktio, trigonometrisiä funktioita tai polynomeja). Koska reaaliakselin osajoukot $[0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ ja $(-\infty, 5] \subset \mathbb{R}$ ovat suljettuja, ovat joukot $A_1 \subset \mathbb{R}^2$ ja $A_2 \subset \mathbb{R}^2$ niiden alkukuvina jatkuvissa kuvauksissa myös suljettuja (Lause 6.2(iii)). Suljettujen joukkojen A_1 ja A_2 leikkaus $A = A_1 \cap A_2$ on myös suljettu (Lause 5.6(ii)), mikä osoittaa väitteen.

(c) Osoita, että on olemassa $\vec{w} \in A$ siten, että $\|\vec{w}\| \geq \|\vec{v}\|$ kaikilla $\vec{v} \in A$. **(2 p)**

Ratkaisu. Kohtien (a) ja (b) perusteella joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu ja rajoitettu. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukkona se on silloin kompakti (Lause luennolta 11, "Heine-Borel").

Avaruuden $\mathbb{R}^2$ normi $\|\cdot\|$ määrittelee joukolla A jatkuvan (1-Lipschitz) funktion

$$g \colon \ A \to \mathbb{R} \qquad\qquad g(\vec{v}) = \|\vec{v}\|.$$

Jatkuva reaaliarvoinen funktio g saa kompaktilla joukolla A suurimman arvonsa jossakin pisteessä $\vec{w} \in A$ (Lause luennolta 11). Suurimmalle arvolle pätee $g(\vec{w}) \geq g(\vec{v})$ kaikilla $\vec{v} \in A$, mikä on täsmälleen haluttu ominaisuus.

Vihje: Polynomien, trigonometristen funktioiden sin ja cos ja eksponenttifunktion exp jatkuvuutta pidetään tunnettuna.

T0-2 Tarkastellaan neliösummautuvien reaalilukujonojen avaruutta

$$X = \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; a_k \in \mathbb{R} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N} \text{ ja } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \right\}.$$

Pidetään tunnettuna, että X on reaalinen vektoriavaruus (komponenteittaisten laskutoimitusten suhteen).

(a) Kun $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$, osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ suppenee itseisesti, eli **(2 p)**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| < \infty.$$

Vihje: Tarkastele ensin osasummia. Muista Cauchy-Schwarz epäyhtälö euklidisten avaruuksien $\mathbb{R}^n$ sisätuloille $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Ratkaisu. Tarkastellaan osasummaa $\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$. Määritellään $x_k = |a_k|$ ja $y_k = |b_k|$, kun $k = 1, \ldots, n$, jolloin sisätuloavaruuden $\mathbb{R}^n$ Cauchy-Schwarz -epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| = \sum_{k=1}^{n} x_k y_j &\le \big\|(x_1, \ldots, x_n)\big\| \, \big\|(y_1, \ldots, y_n)\big\| \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\Big)^{1/2} \\
&\le \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}_{<\infty}\Big)^{1/2} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}_{<\infty}\Big)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

Koska tämä n:stä riippumaton äärellinen yläraja saatiin osasummille, on osasummien jono $\big(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ylhäältä rajoitettu. Osasummien jono on lisäksi kasvava, ja siten suppeneva, ja epäyhtälön säilymisestä seuraa sen raja-arvolle

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\Big)^{1/2}.$$

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ on näinollen itseisesti suppeneva.

(b) Osoita, että avaruuteen X saadaan sisätulo asettamalla **(2 p)**

$$\big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, \, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Ratkaisu. Kohdan (a) perusteella väitetyn sisätulon määrittelevä sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ suppenee, kun

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X,$$

joten riittää tarkistaa sisätulon vaaditut ominaisuudet (S1), (S2), (S3), (S4), (S5).

Ominaisuus (S1) seuraa tulon vaihdannaisuudesta sarjan termeissä

$$\big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k = \big\langle (b_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle.$$

Ominaisuuksia (S2) ja (S3) varten todetaan suppenevien sarjojen lineaarisuus, joka seuraa suoraan raja-arvon lineaarisuudesta (Lauseen 2.3 korollaari).

Ominaisuus (S2) nähdään lineaarisuutta käyttäen laskemalla

$$\big\langle c(a_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (c a_k) b_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = c\big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle,$$

kun $c \in \mathbb{R}$.

Ominaisuus (S3) nähdään vastaavasti laskemalla

$$\begin{aligned}\big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}} + (a'_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a'_k) b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k b_k \\ &= \big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle + \big\langle (a'_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle.\end{aligned}$$

Ominaisuus (S4) seuraa termien epänegatiivisuudesta laskussa

$$\big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_k^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

Ominaisuutta (S5) varten, jos $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \neq \vec{0}$, niin jollakin $k_0 \in \mathbb{N}$ on $a_{k_0} \neq 0$ ja siis $a_{k_0}^2 > 0$, jolloin edellisen kohdan laskussa jokin termeistä on positiivinen ja siis $\big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle > 0$.

(c) Anna lausekkeet kohdan (b) sisätulon indusoimalle avaruuden X normille ja tämän normin indusoimalle metriikalle. **(2 p)**

Ratkaisu. Kohdan (b) sisätulon indusoima normi

$$\|\cdot\| \colon X \to [0, +\infty)$$

on

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sqrt{\big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}},\, (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \Big)^{1/2}.$$

Tämän normin indusoima metriikka

$$d \colon X \times X \to [0, +\infty)$$

on

$$\begin{aligned} d\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}},\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &= \big\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}} - (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\| = \big\|(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\| \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

T0-3 Olkoon

$$g(x) = x^3\, e^{-x} - \frac{1}{2}, \qquad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Pidetään tunnettuna, että $g(1) < 0$ ja $g(2) > 0$, kuten suoralla laskulla voi tarkistaa.

(a) Perustele*, miksi yhtälöllä $g(z) = 0$ on olemassa ratkaisu $z \in (1, 2)$. **(1 p)**

Ratkaisu. Funktio $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva (pisteittäinen summa vakiofunktiosta ja funktiosta, joka on pisteittäinen tulo polynomista ja eksponenttifunktion ja vakiolla -1 kertomisen yhdistetystä funktiosta).

Kurssin tuloksen (Lause 2.5(iii), "Bolzanon lause") perusteella, kun välin $[1, 2]$ päätepisteissä jatkuvan funktion merkki on eri, on sillä nollakohta z välillä $(1, 2)$.

Olkoon $\lambda > 0$ parametri. Määritellään $f(x) = x - \lambda\, g(x)$, kun $x \in [1, 2]$.

(b) Osoita, parametri $\lambda > 0$ voidaan valita niin, että kaikilla $x \in [1, 2]$ on voimassa $f(x) \in [1, 2]$ ja funktio $f \colon [1, 2] \to [1, 2]$ on K-Lipschitz jollakin $K < 1$. **(2 p)**

Vihje: Sopivista derivaatoista ja väliarvolauseesta on tässä apua.

Ratkaisu. Derivaattafunktio $g' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = (3 - x)x^2 e^{-x},$$

on myös jatkuva (pisteittäiset summat ja tulot sekä yhdistetyt funktiot säilyttävät jatkuvuuden ja polynomit ja eksponenttifunktio ovat jatkuvia).

Huomataan lisäksi, että $g'(x) > 0$ kun $x \in [1, 2]$ (y.o. lausekkeessa esiintyvistä tekijöistä kaikki ovat positiivisia: $e^{-x} > 0$, $x^2 > 0$ ja $3 - x > 0$ kun $x \in [1, 2]$). Suljetulla välillä määritelty jatkuva positiivinen funktio $g' \colon [1, 2] \to \mathbb{R}$ saavuttaa maksiminsa ja miniminsä (Lause 3.5(ii)), joten on olemassa vakiot $C > c > 0$ siten, että

$$c \leq g'(x) \leq C \qquad \text{kaikilla } x \in [1, 2]$$

(tähän kelpaa esim. derivaatan maksimi $C = g'(3 - \sqrt{3}) = 6(2\sqrt{3} - 3)e^{\sqrt{3}-3} \approx 0.783612$ ja minimi $c = g'(2) = 4e^{-2} \approx 0.541341$ välillä $[1, 2]$, mutta näiden vakioiden arvoilla ei ole merkitystä).

Valitaan $\lambda > 0$ siten, että $\lambda < \frac{1}{C}$ — konkretian vuoksi vaikkapa $\lambda = \frac{1}{2C}$. Silloin välillä $[1, 2]$ määritelty funktio $f(x) = x - \lambda g(x)$ on kasvava, koska

$$f'(x) = 1 - \lambda g'(x) \geq 1 - \lambda C = \frac{1}{2} > 0.$$

Koska $g(1) < 0$ ja $\lambda > 0$, saadaan $f(1) = 1 - \lambda g(1) > 1$. Samoin koska $g(2) > 0$ ja $\lambda > 0$, saadaan $f(2) = 2 - \lambda g(2) < 2$. Näistä arvoista voidaan funktion f kasvavuuden perusteella päätellä, että kaikilla $x \in [1, 2]$ on

$$1 < f(1) \leq f(x) \leq f(2) < 2,$$

joten haluttu ominaisuus $f(x) \in [1, 2]$ on voimassa.

Vastaavasti havaitaan, että kaikilla $x \in [1,2]$ on

$$f'(x) = 1 - \lambda g'(x) \leq 1 - \lambda c$$

Asetetaan $K = 1 - \lambda c < 1$ ja muistetaan lisäksi, että $f'(x) \geq 0$, jolloin ylläolevasta seuraa $|f'(x)| \leq K$, kun $x \in [1,2]$. Väliarvolauseen perusteella kun $1 \leq x < y \leq 2$, on olemassa sellainen $\xi \in [x,y] \subset [1,2]$, että

$$\big|f(y) - f(x)\big| = \big|f'(\xi)\,(y-x)\big| = |f'(\xi)|\,|y-x| \leq K\,|y-x|.$$

Tämä osoittaa, että $f\colon [1,2] \to [1,2]$ on K-Lipschitz.

(c) Olkoot λ ja K kuten kohdassa (b). Määritellään $x_0 = 2$ ja rekursiivisesti $x_n = f(x_{n-1})$ kun $n \in \mathbb{N}$. Perustele*, miksi on $\lim_{n\to\infty} x_n = z$, missä $z \in (1,2)$ on yhtälön $g(z) = 0$ ratkaisu. **(3 p)**

Ratkaisu. Kun parametri λ on valittu kuten kohdassa (b), funktion f maalijoukoksi kelpaa väli $[1,2]$, joten tutkitaan nyt funktiota

$$f\colon [1,2] \to [1,2].$$

Avaruus $\mathbb{R}$ on täydellinen (Lause 9.4(i)), ja koska suljettu väli $[1,2] \subset \mathbb{R}$ on sen suljettu osajoukko, on se myös täydellinen (Lause 9.4(iv)). Kohdan (b) perusteella f on tämän täydellisen avaruuden $[1,2]$ kontraktio (K-Lipschitz vakiolla $K < 1$). Banachin kiintopistelauseen (Lause 9.5) mukaan funktiolla f on tällöin yksikäsitteinen kiintopiste

$$z = f(z) \in [1,2],$$

ja mistä tahansa alkuarvosta $x_0 \in [1,2]$ lähtien rekursiolla $x_n = f(x_{n-1})$ määritelty jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti tätä kiintopistettä

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z.$$

Kiintopiste z toteuttaa funktion f määritelmän perusteella

$$z = f(z) = z - \lambda g(z),$$

josta sieventämällä (vähennetään puolittain z ja jaetaan vakiolla $\lambda \neq 0$) saadaan

$$g(z) = 0.$$

Kiintopiste on siis halutun yhtälön ratkaisu. Erityisesti alkuarvolla $x_0 = 2$ saadaan nyt väitetty tulos.

Vihje: ($\star$) Perusteluissa on tarkoitus käyttää kurssin tuloksia.

T0-4 Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $a \in X$ piste. Olkoon $f\colon X \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(a) \neq 0$ ja joka on jatkuva pisteessä a.

(a) Osoita, että on olemassa $r > 0$ siten, että kaikilla $x \in B(a, r)$ on $f(x) \neq 0$. **(3 p)**

Ratkaisu. Funktion f jatkuvuus pisteessä $a \in X$ tarkoittaa, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ kun $d(x, a) < \delta$.

Oletuksen mukaan $f(a) \neq 0$, joten valitsemalla $\varepsilon = |f(a)| > 0$ saadaan jatkuvuudesta sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - f(a)| < |f(a)|$ kun $d(x, a) < \delta$ eli kun $x \in B(a, \delta)$. Kolmioepäyhtälön alaraja-arvion perusteella on silloin, kun $x \in B(a, \delta)$,

$$|f(x)| = |f(a) - f(a) + f(x)| \geq |f(a)| - \underbrace{|f(x) - f(a)|}_{<|f(a)|} > 0.$$

Siis valinnalla $r = \delta$, haluttu ominaisuus $f(x) \neq 0$ pätee kun $x \in B(a, r)$.

(b) Osoita, että joukossa $A = \big\{x \in X \;\big|\; f(x) \neq 0\big\}$ kaavalla $x \mapsto 1/f(x)$ määritelty funktio on jatkuva pisteessä a. **(3 p)**

Vihje: Lukujonojen raja-arvojen laskusääntöjä pidetään tunnettuina. Tehtävä helpottuu, kun käyttää tarkoitukseen sopivinta jatkuvuuden karakterisaatiota.

Ratkaisu. Kaavalla $g(x) = 1/f(x)$ määritelty funktio on hyvin määritelty reaaliarvoinen funktio joukossa A (ei nollalla jakamista). Oletuksen $f(a) \neq 0$ mukaan on $a \in A$.

Käytetään jatkuvuuden karakterisaatiota jonojen avulla (Lause 7.3): funktio $g\colon A \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $a \in A$, jos kaikilla joukon A jonoilla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, joille $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, on voimassa

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

Olkoon siis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ joukon A jono, jolle $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. On näytettävä, että reaalilukujono $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti lukua $g(a) = 1/f(a)$. Nyt f:n jatkuvuuden (ja sen jonokarakterisaation) perusteella on $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Reaalilukujonojen raja-arvojen laskusääntöjen perusteella on silloin

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(x_n)} = \frac{1}{f(a)} = g(a).$$

Tämä osoittaa funktion $g(x) = 1/f(x)$ jatkuvuuden pisteessä a.

T0-5 Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

(a) Olkoon $a \in X$ ja $r > 0$. Osoita suoraan avoimen joukon määritelmästä lähtien, että suljetun kuulan $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \le r\}$ komplementti $X \setminus \overline{B}(a, r)$ on avoin osajoukko avaruudessa X. **(3 p)**

Ratkaisu. Joukko $U \subset X$ on määritelmän mukaan avoin, jos jokaisella $x \in U$ on olemassa $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset U$.

Olkoon siis $x \in X \setminus \overline{B}(a, r)$ eli $d(x, a) > r$. Asetetaan nyt

$$r_x = d(x, a) - r > 0.$$

Kun $y \in B(x, r_x)$, saadaan kolmioepäyhtälön alaraja-arviosta silloin

$$d(a, y) \ge d(a, x) - \underbrace{d(x, y)}_{<r_x} > d(a, x) - r_x = r$$

eli $y \in X \setminus \overline{B}(a, r)$. Tämä päättely osoittaa, että

$$B(x, r_x) \subset X \setminus \overline{B}(a, r),$$

ja joukon $X \setminus \overline{B}(a, r)$ avoimuus on näin todistettu..

(b) Olkoon $A \subset X$. Osoita, että jos aliavaruus A on kompakti, niin $A \subset X$ on suljettu osajoukko. **(3 p)**

Vihje: Voit käyttää kurssilla todistettuja suljettujen joukkojen ominaisuuksia.

Ratkaisu. Oletetaan, että $A \subset X$ on kompakti osajoukko avaruudessa X.

Osoitetaan A suljetuksi Lauseen 7.2(iii) karakterisaation avulla: joukko A on suljettu, jos ja vain jos kaikilla joukon A jonoilla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jotka suppenevat avaruudessa X pätee $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Olkoon siis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ joukon A jono, joka suppenee avaruudessa X, eli on olemassa raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in X.$$

Koska aliavaruus A on kompakti, on (kompaktiuden määritelmän mukaan) joukon A jonolla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jokin avaruudessa A suppeneva osajono $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Merkitään tämän osajonon raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} \in A.$$

Mutta avaruudessa X suppenevan jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osajono $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin jono itsekin, joten on oltava

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} \in A.$$

Tämä osoittaa, että jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ raja-arvo on välttämättä joukossa A, ja näyttää näin joukon $A \subset X$ suljetuksi.