MS-C1540 Euklidiset avaruudet
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

K Kytölä & A Gutiérrez
20.2.2020
Tentti T0

T0 Euklidiset avaruudet, tentti 20.2.2020

Tässä tenttitilaisuudessa voi suorittaa joko kurssitentin (KT) tai tentin (T0).

- Kurssitenttiin (KT) kuuluu tehtävät 1–4 (**T0-1**, **T0-2**, **T0-3**, **T0-4**).
- Tenttiin (T0) kuuluu kaikki tehtävät 1–5 (**T0-1**, **T0-2**, **T0-3**, **T0-4**, **T0-5**).
- Opiskelijoiden, jotka ovat ilmoittautuneet kursseille MS-C1540 ja MS-C1081 periodissa III ja jotka suorittavat molemmat tentit samalla, riittää tehdä tehtävät 1–3 (**T0-1**, **T0-2**, **T0-3**).

Tentissä saa käyttää A4-kokoista muistiinpanolappua. Muistiinpanolapun tulee olla käsin kirjoitettu, tekstiä saa olla vain toisella puolella ja lapun oikeassa yläkulmassa tulee olla opiskelijan nimi ja opiskelijanumero. Muistiinpanolapun saa ottaa mukaansa tentin jälkeen.

Tehtävät

T0-1 Olkoon $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geq \exp(\sin(\pi x)) \text{ ja } \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 5\right\}$.

(a) Osoita, että joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu. **(2 p)**

(b) Osoita, että $A \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu osajoukko. **(2 p)**

(c) Osoita, että on olemassa $\vec{w} \in A$ siten, että $\|\vec{w}\| \geq \|\vec{v}\|$ kaikilla $\vec{v} \in A$. **(2 p)**

Vihje: Polynomien, trigonometristen funktioiden sin ja cos ja eksponenttifunktion exp jatkuvuutta pidetään tunnettuna.

T0-2 Tarkastellaan neliösummautuvien reaalilukujonojen avaruutta

$$X = \left\{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; a_k \in \mathbb{R} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N} \text{ ja } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty\right\}.$$

Pidetään tunnettuna, että X on reaalinen vektoriavaruus (komponenteittaisten laskutoimitusten suhteen).

(a) Kun $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$, osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ suppenee itseisesti, eli **(2 p)**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| < \infty.$$

Vihje: Tarkastele ensin osasummia. Muista Cauchy-Schwarz epäyhtälö euklidisten avaruuksien $\mathbb{R}^n$ sisätuloille $\langle (x_1,\ldots,x_n), (y_1,\ldots,y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

(b) Osoita, että avaruuteen X saadaan sisätulo asettamalla **(2 p)**

$$\big\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

(c) Anna lausekkeet kohdan (b) sisätulon indusoimalle avaruuden X normille ja tämän normin indusoimalle metriikalle. **(2 p)**

T0-3 Olkoon

$$g(x) = x^3 e^{-x} - \frac{1}{2}, \qquad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Pidetään tunnettuna, että $g(1) < 0$ ja $g(2) > 0$, kuten suoralla laskulla voi tarkistaa.

(a) Perustele*, miksi yhtälöllä $g(z) = 0$ on olemassa ratkaisu $z \in (1, 2)$. **(1 p)**

Olkoon $\lambda > 0$ parametri. Määritellään $f(x) = x - \lambda\, g(x)$, kun $x \in [1, 2]$.

(b) Osoita, parametri $\lambda > 0$ voidaan valita niin, että kaikilla $x \in [1, 2]$ on voimassa $f(x) \in [1, 2]$ ja funktio $f\colon [1, 2] \to [1, 2]$ on K-Lipschitz jollakin $K < 1$. **(2 p)**

Vihje: Sopivista derivaatoista ja väliarvolauseesta on tässä apua.

(c) Olkoot λ ja K kuten kohdassa (b). Määritellään $x_0 = 2$ ja rekursiivisesti $x_n = f(x_{n-1})$ kun $n \in \mathbb{N}$. Perustele*, miksi on $\lim_{n\to\infty} x_n = z$, missä $z \in (1, 2)$ on yhtälön $g(z) = 0$ ratkaisu. **(3 p)**

Vihje: (*) Perusteluissa on tarkoitus käyttää kurssin tuloksia.

T0-4 Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $a \in X$ piste. Olkoon $f\colon X \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(a) \neq 0$ ja joka on jatkuva pisteessä a.

(a) Osoita, että on olemassa $r > 0$ siten, että kaikilla $x \in B(a, r)$ on $f(x) \neq 0$. **(3 p)**

(b) Osoita, että joukossa $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ kaavalla $x \mapsto 1/f(x)$ määritelty funktio on jatkuva pisteessä a. **(3 p)**

Vihje: Lukujonojen raja-arvojen laskusääntöjä pidetään tunnettuina. Tehtävä helpottuu, kun käyttää tarkoitukseen sopivinta jatkuvuuden karakterisaatiota.

T0-5 Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

(a) Olkoon $a \in X$ ja $r > 0$. Osoita suoraan avoimen joukon määritelmästä lähtien, että suljetun kuulan $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ komplementti $X \setminus \overline{B}(a, r)$ on avoin osajoukko avaruudessa X. **(3 p)**

(b) Olkoon $A \subset X$. Osoita, että jos aliavaruus A on kompakti, niin $A \subset X$ on suljettu osajoukko. **(3 p)**

Vihje: Voit käyttää kurssilla todistettuja suljettujen joukkojen ominaisuuksia.