ELEC-C1230 Säätötekniikka
Välikoe 1. 20.2.2020

- *Merkitse kaikkiin vastauspapereihin kurssin nimi, oma nimi, koulutusohjelma, vuosikurssi ja opiskelijanumero.*
- *Kokeessa on neljä (4) tehtävää ja kaikkiin pitää vastata.*
- *Kokeessa ei saa käyttää kaavakokoelman lisäksi mitään kirjallisuutta. Funktiolaskin on sallittu.*
- *Kaavakokoelma on palautettava, jos olet saanut sen tentin valvojalta.*
- *HUOM. Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta voidaan nähdä, miten olet ratkaisuun päätynyt.*

---

1. Prosessia kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+8y(t)=2u(t)$$

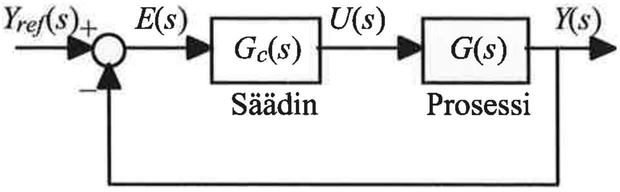
Määritä:
i) siirtofunktio (2p)
ii) (yksikkö)impulssivaste (2p)
iii) staattinen vahvistus (tulosuureena askelmainen muutos) (2p)

2. Tarkastellaan prosessia

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

a. Määritä siirtofunktio. (2p)
b. Mitä voidaan sanoa stabiilisuudesta? (2p)
c. Voidaanko systeemi eli tulo-lähtöriippuvuus kuvata ensimmäisen kertaluvun tilaesityksellä (vain yksi tilamuuttuja)? Jos voidaan, tee tilaesitys. (2 p)

3. Tarkastellaan kuvan säätökytkentää



jossa $G_c(s)=K_P+K_Ds$ ja $G(s)=\dfrac{4}{s^2+4}$. (K_P ja K_D ovat reaalisia vakioita).

a. Minkätyyppinen säädin on kyseessä? (2p)
b. Millä säätimen viritysarvoilla suljettu systeemi on (asymptoottisesti) stabiili? (2p)

KÄÄNNÄ

c. Viritä säädin siten, että erosuureen jatkuvuustilan arvo on pienempi kuin 0,1, kun referenssiin tulee yksikköaskel. Ohje: Muodosta ensin siirtofunktio $E(s)/Y_{ref}(s)$.

(2p)

4. Selitä käsitteet (hyvin lyhyt kuvaus riittää; siitä on kuitenkin voitava todeta, että olet ymmärtänyt asian)

a.	dominoiva napapari	(1 p)
b.	vaimennussuhde	(1 p)
c.	aikavakio	(1 p)
d.	saavutettavuus	(1 p)
e.	tilatakaisinkytkentä	(1 p)
f.	BIBO-stabiilisuus	(1 p)

ELEC-C1230 Säätötekniikka Välikoe 1 20.2.2020

Ratkaisut

1. $\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = 2u$

Laplace-muunnetaan, alkuarvot nolliksi

$$s^2 Y(s) + 6sY(s) + 8Y(s) = 2U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2+6s+8} \qquad (i)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2}{s^2+6s+8} \cdot 1 = \frac{2}{(s+2)(s+4)}$$

Taulukosta $y(t) = \frac{2}{-2}\left(e^{-4t} - e^{-2t}\right) = e^{-2t} - e^{-4t}$ (ii)

Systeemi on asymptoottisesti stabiili, joten loppuarvoteoreemaa voidaan käyttää:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0) = \frac{1}{4} \qquad (iii)$$

2. $$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

a. $$G(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)s-(-1)} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{s^2+2s+1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+2s+1} \begin{bmatrix} s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\frac{s+1}{s^2+2s+1}} = \frac{s+1}{(s+1)^2}$$

$$= \underline{\frac{1}{s+1}}$$

b. Navat vasemmassa puolitasossa => asymptoottisesti stabiili, myöskin BIBO-stabiili

c. Siirtofunktiossa tapahtui nolla-napa-supistuminen jolloin tulo-lähtödynamiikka on todella 1. astetta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \dot{y}(t) + y(t) = u(t) \Rightarrow \underline{\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}}$$

3. a) PD-säätäjä

b) $1 + G_c(s)G(s) = 1 + \frac{(K_P + K_D s)\,4}{s^2+4} = \frac{s^2+4+4(K_P+K_D s)}{s^2+4} = 0$

$\Rightarrow s^2 + 4K_D s + 4(K_P+1) = 0$ Karakteristinen yhtälö

Routh-Hurwitz:

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^2 & 1 & 4(K_P+1) & 0 \\
s^1 & 4K_D & 0 & 0 \\
s^0 & 4(K_P+1) & &
\end{array}
$$

$\Uparrow$

ei sallita merkinvaihtoja

$K_D > 0$, $K_P + 1 > 0 \Rightarrow K_P > -1$

c) $E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s) = Y_{ref}(s) - G(s)G_c(s)E(s)$

$\Rightarrow [1 + G(s)G_c(s)]E(s) = Y_{ref}(s)$

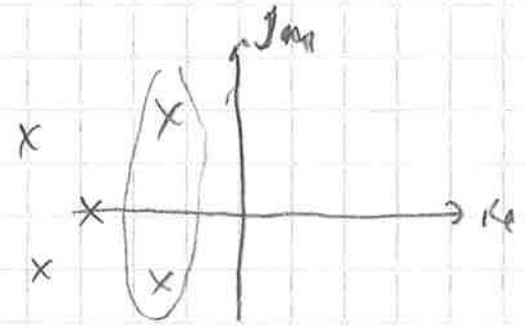
$\Rightarrow G_E(s) = \frac{E(s)}{Y_{ref}(s)} = \frac{1}{1+G(s)G_c(s)} = \frac{1}{1+\frac{4}{s^2+4}(K_P+K_D s)} = \frac{s^2+4}{s^2+4+4K_P+4K_D s}$

Kun asymptoottisesti stabiili, niin staattinen vahvistus referenssistä erosuureeseen on $G_E(0) = \frac{4}{4(1+K_P)} = \frac{1}{1+K_P}$

$\frac{1}{1+K_P} < 0.1 \Rightarrow 1+K_P > \frac{1}{0.1} = 10 \Rightarrow K_P > 9,\ K_D > 0$

(pitää olla stabiilisuusalueella)

4. a) Dominoiva napapari



Lähinnä imaginääriakselia oleva napapari, joka approksimoi koko systeemin värähtelyominaisuuksia.

b) $\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$, $s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2=0$

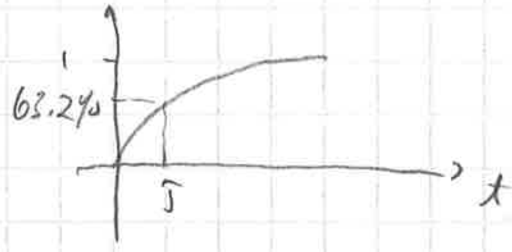
antaa dominoivan napaparin, kun $0<\zeta<1$

vaimennussuhde ζ ilmaisee kuinka paljon systeemi oskilloi

$\zeta=0 \Rightarrow$ harmoninen värähtelijä

$\zeta=1 \Rightarrow$ eksponentiaalinen vaste, joka ei värähtele

c) $\frac{1}{1+\tau s}$, τ = aikavakio



ilmaisee, kuinka nopea systeemi on. 1. asteen järjestelmällä aika, jona askelvaste saavuttaa n. 63.2% loppuarvosta

d. Saavutettavuus ilmaisee, voidaanko systeemin mielivaltainen alkutila $x(0)$ ohjata mielivaltaiseen lopputilaan $x(t_f)$ äärellisellä ohjauksella $u(t)$ äärellisessä ajassa t_f.

e. $\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx$ Prosessi

Tilatakaisinkytkentä $u(t) = -Lx(t)$
(tilat oletetaan mitatuiksi)

f. BIBO-stabiilisuus: Jokainen äärellinen tulosuure johtaa äärelliseen lähtösuureeseen.