

Ohje: Vastaa suomeksi. Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä.

Tee ratkaisusi käsin selvästi paperille (tai tablettitietokoneelle) ja lähetä ratkaisut PDF-muodossa kurssisivulla olevaan palautuslaatikkoon. Huolehdi, että joka sivulla näkyy: kurssikoodi, sukunimi, etunimi, opiskelijanumero ja päivämäärä.

T1 Ville ja Kalle lähtevät keskinäiseen tapaamiseensa samaan aikaan eri busseilla. Villen matka-aika minuutteina on normaalijakautunut odotusarvolla 20 ja keskihajonnalla 3. Kallen matka-aika on normaalijakautunut odotusarvolla 22 ja keskihajonnalla 3. Matka-ajat ovat riippumattomat. Merkitään X :llä sitä, kuinka paljon Villen jälkeen Kalle saapuu (negatiivinen jos Kalle saapuu ensin).

- (a) Mikä on X :n jakauma? (Nimi ja parametrit) **(3p)**
- (b) Mikä on todennäköisyys, että Kalle saapuu ensin? **(3p)**

T2 Eräällä satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla f , missä

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3 & \text{jos } -1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

- (a) Määritä X :n kertymäfunktio. **(1p)**
- (b) Laske X :n odotusarvo. **(1p)**
- (c) Laske X :n moodi (tiheysfunktion maksimikohta). **(1p)**
- (d) Laske X :n mediaani, ts. sellainen luku m , että $\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$. **(1p)**
- (e) Laske satunnaismuuttujan $Y = 2 - X$ odotusarvo. **(1p)**
- (f) Laske $\mathbb{P}(X^2 < 1)$. **(1p)**

T3 Luennoijalla on neljä 6-sivuista noppaa, joista kolme on tavallisia (tulokset $1, \dots, 6$ ovat yhtä todennäköiset). Yksi noppa on litistynyt siten, että tulosten 1 ja 6 todennäköisyys on kummankin 0.3 ja kunkin muun tuloksen todennäköisyys 0.1. Luennoija on poiminut yhden nopista satunnaisesti ja heittänyt sitä viisi kertaa saaden tulosjonon $(6, 6, 2, 4, 6)$. Merkitään $\Theta = 1$ jos poimittu noppa on tavallinen ja $\Theta = 2$ jos se on litistynyt.

- (a) Laske todennäköisyys saada juuri tämä tulosjono, jos noppa oli tavallinen. **(1p)**
- (b) Laske todennäköisyys saada juuri tämä tulosjono, jos noppa oli litistynyt. **(1p)**
- (c) Määritä parametrin Θ posteriorijakauma. **(3p)**
- (d) Käyttäen saatua posteriorijakaumaa, määritä todennäköisyys saada 10 kuutosta, jos poimittua noppaa heitetään vielä 10 kertaa. **(1p)**

T4 Auton tuulilasiin osuu hyönteisiä satunnaisesti siten, että kahden peräkkäisen osuman väliaika X_i (minuutteina) on jatkuvasti jakautunut tiheysfunktiolla

$$f_{X_i}(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i},$$

kun $x_i > 0$. Väliajat ovat keskenään riippumattomat ja λ on parametri, jonka arvo on tuntematon. Neljä peräkkäistä hyönteisosumien väliaikaa olivat 19.5, 8.6, 0.9 ja 2.3 (minuuttia).

- (a) Määritä parametrin λ suurimman uskottavuuden estimaatti. **(3p)**
- (b) Parametria pidetään satunnaismuuttujana Λ , jonka priorijakaumalla on tiheysfunktio

$$f_{\Lambda}(\lambda) = 2e^{-2\lambda},$$

kun $\lambda > 0$. Määritä parametrille Λ normalisoimaton posteriorijakauma ja etsi sen maksimikohta (posteriorimoodi). Normalisointivakiota ei tarvitse ratkaista. **(3p)**

Huom. Perustele vastauksesi laskutoimituksin. Vaikka tunnistaisit, minkäniminen jakauma on kyseessä, ratkaisuksi eri riittää vetoaminen siihen, että esim. jakauman moodille on jokin tunnettu lauseke.

Normaalijakauman taulukko

Allaolevaan taulukkoon on koottu lukuarvoja normitetun normaalijakauman kertymäfunktiolle

$$\Phi(x) = F_Z(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999