ELEC-C3220 Kvantti-ilmiöt, kevät 21 **VK 1, osa B, malliratkaisut**

opettaja: Matti Raasakka

Tehtävä B1

Kvanttihiukkanen on aluksi perustilallaan yksiulotteisessa äärettömässä potentiaalikaivossa välillä $[0,L]$. Yhtäkkiä kaivon leveys kaksinkertaistuu, jonka jälkeen potentiaalikaivo sijaitsee välillä $[0,2L]$. Millä todennäköisyydellä hiukkanen löytyy perustilaltaan potentiaalikaivon muutoksen jälkeen? Anna vastaukseksi sekä tarkka arvo että likiarvo. (6p)

Malliratkaisu:

Kun hiukkanen on yksiulotteisessa äärettömässä potentiaalikaivossa välillä $[0,L]$, sen perustilan aaltofunktio on

$$\phi_1(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-itE_1/\hbar} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) & ,0 < x < L \\ 0 & ,\text{muuten} \end{cases} ,$$

missä E_1 on perustilan energia. Kun kaivon leveys muuttuu, niin sen perustilakin muuttuu, ollen muutoksen jälkeen

$$\phi_1'(x,t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{L}} e^{-itE_1/\hbar} \sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right) & ,0 < x < 2L \\ 0 & ,\text{muuten} \end{cases} ,$$

missä E_1' on välillä $[0,2L]$ olevan kaivon perustilan energia. (1p)

Kun kaivon leveys muuttuu hyvin nopeasti, niin hiukkasen tila pysyy hetkellisesti kapean kaivon perustilana, ja todennäköisyys sille, että hiukkanen havaitaan leveämmän kaivon perustilalta saadaan todennäköisyystulkinnan perusteella tilojen sisätulon itseisarvon neliönä. (1p) Lasketaan tilojen sisätulo

$$\langle \phi_1' | \phi_1 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{L} e^{-it(E_1 - E_1')/\hbar} \int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x \,. \qquad \text{(1p)}$$

Integraalista saadaan

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \frac{4L}{3\pi} \,, \qquad \text{(1p)}$$

joten sisätulolle saadaan arvoksi

$$\langle \phi_1' | \phi_1 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{L} e^{-it(E_1 - E_1')/\hbar} \frac{4L}{3\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} e^{-it(E_1 - E_1')/\hbar} \,. \qquad \text{(1p)}$$

Todennäköisyys löytää hiukkanen perustilalta saadaan sisätulon itseisarvon neliönä

$$|\langle \phi_1' | \phi_1 \rangle|^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right)^2 = \frac{32}{9\pi^2} \approx 0{,}36 \,. \qquad \text{(1p)}$$

Tehtävä B2

Kaksi kubittia on tilassa $|00\rangle$ ajanhetkellä $t = 0$ s. Kubittien yhteinen Hamiltonin operaattori $\hat{H} = \epsilon \sigma_x \otimes \sigma_x$, missä σ_x on x-suuntainen Paulin matriisi ja $\epsilon = 1{,}00$ eV vakio. Millä todennäköisyydellä ensimmäisen kubitin arvo on 0 ajanhetkellä $t = 1{,}00$ ns? (6p)

VINKKI: x-suuntainen Paulin matriisi operoi yhden kubitin kantavektoreihin seuraavasti.

$$\sigma_x |0\rangle = |1\rangle \,, \quad \sigma_x |1\rangle = |0\rangle \,.$$

Malliratkaisu:

Ratkaistaan ensin Hamiltonin operaattorin ominaisarvot ja ominaistilat. Ominaistilan

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

täytyy toteuttaa ominaisarvoyhtälö $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$. (1p) Sijoittamalla ominaistilan lauseke yhtälöön, ja operoimalla Hamiltonin operaattorilla, saadaan

$$\epsilon(c_{00}|11\rangle + c_{01}|10\rangle + c_{10}|01\rangle + c_{11}|00\rangle) = E(c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle)\,,$$

joten kertoimille saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \epsilon c_{00} = E c_{11} \\ \epsilon c_{01} = E c_{10} \\ \epsilon c_{10} = E c_{01} \\ \epsilon c_{11} = E c_{00} \end{cases} .$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä ominaisarvoiksi löydetään $E = \pm\epsilon$. (1p) Ominaisarvoa $E = \epsilon$ vastaavat normalisoidut ominaisvektorit ovat

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)\,, \quad |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

(tai mitkä tahansa kaksi näiden vektoreiden ortonormaalia lineaarikombinaatiota). Ominaisarvoa $E = -\epsilon$ vastaavat normalisoidut ominaisvektorit ovat

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)\,, \quad |\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad \text{(1p)}$$

(tai mitkä tahansa kaksi näiden vektoreiden ortonormaalia lineaarikombinaatiota).

Nyt voidaan Schrödingerin yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \langle\Psi_n|\Psi(0)\rangle e^{-itE_n/\hbar}|\Psi_n\rangle\,,$$

missä summataan Hamiltonin operaattorin ominaistilojen yli, ja $|\Psi(0)\rangle = |00\rangle$ on kvanttitila ajanhetkellä $t = 0$ s. (1p) Sijoittamalla sisätulojen arvot ja ominaistilat tähän lausekkeeseen saadaan kubittien kvanttitilaksi ajanhetkellä t

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-it\epsilon/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{it\epsilon/\hbar}\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-it\epsilon/\hbar} + e^{it\epsilon/\hbar})|00\rangle + \frac{1}{2}(e^{-it\epsilon/\hbar} - e^{it\epsilon/\hbar})|11\rangle \\ &= \cos(-t\epsilon/\hbar)|00\rangle + i\sin(-t\epsilon/\hbar)|11\rangle\,. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Tila $|\Psi(t)\rangle$ on siis kaikilla ajanhetkillä vain kantatilojen $|00\rangle$ ja $|11\rangle$ superpositio. Näistä vain tilassa $|00\rangle$ ensimmäinen kubitti saa arvon 0, joten todennäköisyydeksi havaita ensimmäinen kubitti tilassa 0 saadaan kertoimen neliö $\cos^2(-t\epsilon/\hbar)$. (Voisi myös laskea sisätulojen itseisarvojen neliöiden avulla.) Sijoittamalla lukuarvot löydetään todennäköisyydeksi

$$\cos^2\left(\frac{1{,}00\cdot 10^{-9}\text{ s}\cdot 1{,}00\text{ eV}\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\text{ J/eV}}{1{,}055\cdot 10^{-34}\text{ Js}}\right) \approx 0{,}254\,. \quad \text{(1p)}$$