Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik
MS-A0501, MS-A0502, MS-A0503, MS-A0504, MS-A0509 — Tentamen
Institutionen för matematik och systemanalys — 29.5.2020
Aalto-universitetet — J Kohonen / G Metsalo

Instruktioner: Svara på svenska. Svara kort och koncist, men motivera lösningarna. Endast ett tal som svar ger inga poäng. Denna tentamen består av 4 uppgifter, som vardera ger 0–6 poäng.

Skriv lösningarna tydligt för hand, antingen på papper eller på en tablettdator och skicka dem som en PDF-fil till returneringslådan på hemsidan för tentamen. Se till att det i lösningarna framgår: kurskod, efternamn, förnamn, studienummer och datum.

P1 Herrarna A, B och C är på jakt och skjuter samtidigt mot samma älg. Deras respektive sannolikheter att träffa älgen är 0.1, 0.2 och 0.3 och träffarna är oberoende. Låt A, B och C vara indikatorvariablerna, som anger om respektive herre träffade älgen eller inte.

(a) Ange alla möjliga värden för den stokastiska vektorn (A, B, C) samt deras respektive sannolikheter med tre decimaler (en decimal, om du använder procent). **(2p)**

(b) Låt X vara antalet skott, som träffar älgen. Ange alla möjliga värden för X samt deras respektive sannolikheter. **(2p)**

(c) Om älgen träffas av exakt ett skott, vad är då sannolikheten att det är herr C som skjutit det? **(2p)**

P2 En slumpvariabel X har den kontinuerliga täthetsfunktionen f, där

$$f(x) = \begin{cases} x/2 - 5 & \text{om } 10 \le x \le 12, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

(a) Bestäm fördelningsfunktionen för X. **(1p)**

(b) Beräkna väntevärdet för X. **(1p)**

(c) Bestäm moden för X (maxpunkten för täthetsfunktionen). **(1p)**

(d) Beräkna medianen för X, dvs. ett sådant tal m att $\mathbb{P}(X \le m) = 1/2$. **(1p)**

(e) Beräkna väntevärdet för slumpvariabeln $Y = 12 - X$. **(1p)**

(f) Beräkna $\mathbb{P}(X^2 < 121)$. **(1p)**

Ange svaren till delarna (b)–(e) med tre decimaler.

P3 Det årliga högsta vattenståndet i en viss flod är normalfördelat med väntevärdet 5 meter och standardavvikelsen 1 meter. Vattenstånden för olika år är oberoende.

(a) Vi undersöker ett år. Vad är sannolikheten att vattenståndet förblir under 6 meter? **(2p)**

(b) Vi undersöker 100 på varandra följande år. Vad är sannolikheten att vattenståndet förblir under 6 meter varje år? **(2p)**

(c) Vi bygger en skyddsvall, vars höjd är h meter. Bestäm minsta möjliga värdet på h så att sannolikheten att vattenståndet förblir under h meter nästa 100 år är minst 95 procent. **(2p)**

P4 Ett visst parti fick 16.0 % av rösterna i senaste valet. Nu har en gallup-undersökning genomförts, där 1 000 slumpvis utvalda personer angav vilket parti de stöder. Av dessa angav 170 de stödde partiet i fråga.

(a) Bestäm ett 95 % konfidensintervall för partiets nuvarande stöd hos befolkningen. Använd normalapproximationen. För standardavvikelsen, använd en skattning beräknad från stickprovsandelen 0.17. (Använd inte den konservativa skattningen som beräknas från andelen 0.5.) **(3p)**

(b) Testa på signifikansnivån $\alpha = 0.05$ nollhypotesen att partiets stöd fortfarande är detsamma som i det senaste valet, mot den alternativa hypotesen att stödet har förändrats. Använd normalapproximationen. Beräkna p-värdet och ange om nollhypotesen förkastas eller inte. **(3p)**

En tabell för normalfördelningen

Tabellen nedan innehåller numeriska värden för den kumulativa fördelningsfunktionen för en standardiserad normalfördelning,

$$\Phi(x) = F_Z(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999