Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Matematiikan laitos Malmivuori

MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

Tentti 17.6.2020 klo 16.30-20.30

Koeaika on 4 tuntia.
Exam time is 4 hours.
Tentamenstiden är 4 timmar.

Ohjeita tenttiin ja välikokeisiin:

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodikohtaan opintojakson numero, nimi selvästi. Merkitse kaikki omat tietosi; nimi ja opiskelijanumero. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Write on each paper clearly your name and your student number. Write also headings above; i.e. the name of the course, the course code and on which of the programs ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT are you studying; or if you have still another program which is not mentioned here, then write it.

Skriv tydligt på varje svarspapper ditt namn och studienummer. Skriv även kursens namn, kurskod samt ditt kursprogram. Kursprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

1. (5 p.)

Viesti koostuu numeroista 0 ja 1. Niitä esiintyy siten, että numeroa 0 on 40 prosenttia ja numeroa 1 on 60 prosenttia.

Huonossa viestiyhteydessä numero 0 muuttuu numeroksi 1 todennäköisyydellä 1/4 ja numero 1 muuttuu numeroksi 0 todennäköisyydellä 1/3.

Mikä on todennäköisyys, että on lähetetty numero 0, jos on vastaanotettu numero 0?

The message of numbers consists of zeros (0) and ones (1). The amount of 40 percents of the numbers are zeros (0) and the amount of 60 percent of the numbers are ones (1).

The information connection is quite poor so that the sent number 0 is changed into a number 1 with the probability 1/4 and the sent number 1 is changed into a number 0 with the probability 1/3.

What is the probability that the number 0 was sent if we have received number 0?

Ett meddelande består av siffror: nollor (0) och ettor (1). Av siffrorna är 40 procent nollor (0) och 60 procent ettor (1).

På grund av den dåliga kommunikationsförbindelsen mottages en sänd nolla som en etta med sannolikheten 1/4 och en sänd etta som en nolla med sannolikheten 1/3.

Vad är sannolikheten att en nolla har sänts, om en nolla har mottagits?

2. (5 p.)

Jatkuvan satunnaismuuttujaparin (X, Y) yhteisjakauma on seuraava:

$$f(x, y) = c(x^2 + y^2) + xy.$$

kun $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1$ ja 0 muulloin.

a) Määrää c ja satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat.

b) Ovatko satunnaismuuttujat X ja Y riippumattomia?

c) Määrää ehdollinen jakauma $X \mid Y = 1$ ja ehdollinen odotusarvo $E(X \mid Y = 1)$.

The joint distribution of the random variable pair (X, Y) is the following:

$$f(x, y) = c(x^2 + y^2) + xy.$$

when $0 \leq x \leq 1$ and $0 \leq y \leq 1$ and 0 otherwise.

a) Determine the constant c and the marginal distributions of the random variables X and Y.

b) Are the random variables X and Y independent?

c) Determine the conditional distribution $X \mid Y = 1$ and the conditional expectation $E(X \mid Y = 1)$.

Den kontinuerliga tvådimensionella slumpvariabeln (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f(x, y) = c(x^2 + y^2) + xy.$$

då $0 \leq x \leq 1$ samt $0 \leq y \leq 1$ och 0 annars.

a) Bestäm konstanten c samt de marginella täthetsfunktionerna för slumpvariablerna X och Y.

b) Är slumpvariablerna X och Y oberoende?

c) Bestäm den betingade fördelningen $X \mid Y = 1$ och det betingade väntevärdet $E(X \mid Y = 1)$.

3. (5 p.)

Jatkuvan satunnaismuuttujan X jakauma riippuu parametristä $\theta > 1$ ja sen tiheysfunktio on

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta-1)(x-2)^{\theta-2}, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Otamme satunnaisotoksen tästä jakaumasta $(X_1, ..., X_n)$. Määrää suurimman uskottavuuden estimaattori (estimaatti) paramterille θ.

Let X be a random variable, which has a density function f depending on the parameter $\theta > 1$

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta-1)(x-2)^{\theta-2}, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We have a random sample $(X_1, ..., X_n)$, the elements of which have the distribution given by the function f. Determine the maximum likelyhood estimator for the parameter θ.

Den kontinuerliga slumpvariabeln X har en tähetsfunktion f, som beror på en parameter $\theta > 1$

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta-1)(x-2)^{\theta-2}, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi tar ett stickprov $(X_1, ..., X_n)$ från denna fördelning. Bestäm maximum likelihood-skattningen av parametern θ.

4. (4 p.)

Tehtaassa valmistetaan tankoja, joiden tavoitepituus on 80 cm. Oletetaan, että tankojen pituus vaihtelee satunnaisesti noudattaen normaalijakaumaa.

Poimitaan 100 kappaleen otos tankoja ja mitataan kunkin pituus. Tulokseksi olemme saaneet, että otoskeskiarvo on 82 cm ja otosvarianssi on 0,025 cm^2.

Testaa merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$ nollahypoteesia, että tehtaassa valmistettavien tankojen keskipituus on tavoitearvon mukainen ts. 80 cm. Vaihtoehtoisena hypoteesina on, että keskipituus eroaa arvosta 80 cm.

In a factory we produce rods the length of which is planned to be 80 cm. We assume that the length of the rods varies randomly having a normal distribution.

We pick a sample of 100 rods and measure the length of each. We have the results that the arithmetic mean of the sample is 82 cm and the variance of the sample is 0,025 cm^2.

Test at significance level $\alpha = 0.05$ the null hypotesis that the average length of the rods produced in the factory have the desired value 80 cm. The alternative hypotesis is that the average length differs from the desired value 80 cm.

En fabrik tillverkar stänger, vilkas längd borde vara 80 cm. Vi antar att stängernas längder varierar slumpmässigt och är normalfördelade.

Vi tar ett stickprov bestående av 100 stänger och mäter deras längder. Längdernas aritmetiska medelvärde visar sig vara 82 cm och stickprovsvariansen 0,025 cm^2.

Testa på signifikansnivån $\alpha = 0.05$ nollhypotesen att stängerna, som fabriken producerar har den önskade genomsnittliga längden 80 cm, om den alternativa hypotesen är att den genomsnittliga längden skiljer sig från 80 cm.

5. (5 p.)

Oletetaan, että eräiden komponenttien eliniät ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat samaa eksponenttijakaumaa parametrinaan λ.

Määrää sellaisen systeemin eliniän kertymäfunktio ja tiheysfunktio sekä eliniän odotusarvo, jossa n komponenttia on kytketty

a) sarjaan; b) rinnan.

Assume that the lifetimes of certain components are independent random variables, that are exponentially distributed with parameter λ.

Determine the probability distribution function, the probability density function and the expected value of the lifetime of a system, where n such components connected in

a) a series; b) parallel.

Antag att livslängderna hos vissa komponenter är oberoende slumpvariabler, som är exponential-fördelade med parametern λ.

Bestäm fördelningsfunktionen, täthetsfunktionen samt livslängdens väntevärde för ett system, där n sådana komponenter kopplats

a) i serie; b) parallellt.