Aalto-yliopisto

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Kurssikoe ja tentti 17.2.2020 klo 9-12 **Malinen/Hirvi**

MS-A0205 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (ENG)

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.
Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa.

1. Laske spiraalinpätkän $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t, \\ y(t) = e^{-t}\sin t, \end{cases}$$

kaarenpituus, kun parametri $t \in [0, \tau]$. Mitä tapahtuu kun $\tau \to \infty$?

2. Määritä pinnan $x^3 + 3x^2y + y^2 + 2\sin z = 11$ sellainen normaalivektori pisteessä $(1, 2, 0)$, joka on terävässä kulmassa (siis alle $\pi/2$ rad eli 90 astetta) positiivisen z-akselin kanssa.

3. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{xy}{x+y},$$

kun $x > 0,\ y > 0$.
a) Laske osittaisderivaatat f_x ja f_y pisteessä $(1, 2)$.
b) Funktion f arvojen muutokselle Δf pisteen $(1, 2)$ lähellä voidaan lineaarisen approksimaation avulla johtaa epäyhtälö

$$|\Delta f| \le |f_x(1,2)| \cdot |\Delta x| + |f_y(1,2)| \cdot |\Delta y|.$$

Sovella kaavaa tapauksessa $x \approx 1 \pm 0{,}01$ ja $y \approx 2 \pm 0{,}02$.

KÄÄNNÄ!

4. Määritä funktion

$$f(x, y, z) = x + 2y + \frac{z^2}{2}$$

suurin ja pienin arvo pallolla $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ käyttämällä Lagrangen kertojien menetelmää.

5. Tarkastellaan $2a$-säteistä sylinterilevyä D, jonka keskelle on porattu a-säteinen reikä, $a > 0$. Olkoon levyn paksuus $h > 0$ ja levyn materiaalin tiheys vakio ρ_0.

   Pyöritetään levyä (kenties jonkinlaisten massattomiksi ajateltujen puolien varassa) keskipisteensä ympäri, jolloin sen hitausmomentiksi saadaan

$$I_z = \iiint_D \rho_0(x^2 + y^2)\, dV,$$

   missä integraalissa pyörimisakseli on ajateltu z-akseliksi.

   Etsi arvo geometriselle vakiolle k, jolla hitausmomentti saadaan esitettyä muodossa $I_z = kma^2$, missä $m = \rho_0 V$ on levyn kokonaismassa ja $V = 3\pi a^2 h$ on levyn tilavuus.

KÄÄNNÄ!