MS-C1420 Fourier-analyysi (Aalto-yliopisto) Turunen
19.10.2020, 13:00–17:00

Voit käyttää tietokonetta, verkkosivustoja ja kurssin materiaalia. Koetehtävät on kuitenkin ratkottava itsenäisesti. Kerro mitä lähteitä käytit ratkaisuissasi.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.).

1. (a) Mitä tarkoittaa, että "*Fourier-muunnos säilyttää energian*"?

   (b) Laske signaalin $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ energia, missä $s(t) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t\cdot\alpha}\, \mathrm{e}^{-\alpha}\, \mathrm{d}\alpha$.

2. Tiedetään 1-periodisen signaalin $s_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-sarjaesitys

$$s_1(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{s_1}(\nu)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}, \quad \text{jossa} \quad \widehat{s_1}(\nu) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu} s_1(t)\, \mathrm{d}t.$$

   Tarkastellaan P-periodista signaalia $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (eli tässä $s(t-P) = s(t)$ kaikilla t, missä $P > 0$). Päättele signaalin s Fourier-sarjaesitys

$$s(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdots}. \qquad \text{Toisin sanoen vastaa perustellen :}$$

   (a) Miten lasketaan kertoimet c_ν?

   (b) Mikä tässä on tarkka lauseke eksponenttitekijälle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdots}$?

   (c) Olkoon nyt $s(t) = \cos(t)$. Esitä tämä signaali s Fourier-sarjana.

3. Olkoon $s(t) \in \mathbb{R}$ ilmanpaine hetkellä $t \in \mathbb{R}$ (ajan yksikkö sekunti). Mitataan signaalista näytteet $s_k = s(k/8000)$, jotka kootaan vektoriksi $v = (s_k)_{k=1}^N = (s_1, s_2, s_3, \cdots, s_N)$, missä $N = 32000$. `Matlab`-komento `fft` laskee vektorin v nopean Fourier-muunnoksen. Olkoon tämän laskennan tulos vektori $(X_k)_{k=1}^N = (X_1, X_2, X_3, \cdots, X_N)$. Vektorissa $w = (|X_k|^2)_{k=1}^N$ havaitaan poikkeuksellisen suuria lukuja kohdissa $k = 1$ ja $k = 1000$.

   (a) Mitä signaalista s voi tämän perusteella sanoa?

   (b) Myös ainakin jossakin muussa kohtaa vektoria w pitäisi olla suuri luku: Missä? Miksi?

4. Schwartz-testifunktioille $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ja $a : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ olkoon

$$As(t) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(t-u)\cdot\nu}\, a(t,\nu)\, s(u)\, \mathrm{d}\nu\, \mathrm{d}u, \quad R(r,s)(t,\nu) = r(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}\, \widehat{s}(\nu)^*.$$

   (a) Näytä, että $As(t) = f(t)\, s(t)$, kun $a(t,\nu) = f(t)$.

   (b) Näytä, että $As(t) = g * s(t)$, kun $a(t,\nu) = \widehat{g}(\nu)$.

   (c) Näytä, että $\langle r, As\rangle = \langle R(r,s), a\rangle$.

MS-C1421 Fourieranalys (Aalto-universitetet) Turunen
19.10.2020, 13:00–17:00

Du kan använda dator, nätsidor och kursmaterialet. Problemen måste lösas individuellt. Ange vilka källor du använt.

Angående rättningen: Varje problem bedöms på skalan från 0 till 6 poäng. Harmlösa små fel hindrar inte dig att få maximala poäng. Du kommer få poäng om din lösning innehåller någon relevant information (relevanta definitioner, figurer, räkningar etc).

1. (a) Vad innebär "*Fouriertransformationen konserverar energin*"?

   (b) Beräkna energin för $s:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, då $s(t)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t\cdot\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$.

2. En 1-periodisk signal $s_1:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ har Fourierserien

$$s_1(t)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{s_1}(\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu},\qquad \text{där}\qquad \widehat{s_1}(\nu)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}s_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Låt oss studera en P-periodisk signal $s:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (alltså här $s(t-P)=s(t)$ för alla t, där $P>0$). Härled Fourierserien

$$s(t)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}c_\nu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdots}\qquad\qquad \text{Alltså ange med motiveringar:}$$

   (a) Hur koefficienterna c_ν beräknas?

   (b) Vad är den exakta formeln för den exponentiella faktorn $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdots}$?

   (c) Låt nu $s(t)=\cos(t)$. Presentera s som en Fourierserie.

3. Låt $s(t)\in\mathbb{R}$ vara lufttrycket vid tidpunkt $t\in\mathbb{R}$ (tiden mäts i sekunder). Mätvärdena $s_k=s(k/8000)$ bildar vektorn $v=(s_k)_{k=1}^N=(s_1,s_2,s_3,\cdots,s_N)$, där $N=32000$. `Matlab`-kommandot `fft` beräknar den snabba Fouriertransformen av v. Låt $(X_k)_{k=1}^N=(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_N)$ vara resultatet av denna beräkning. Antag att vektorn $w=(|X_k|^2)_{k=1}^N$ har exceptionellt stora tal i positionerna $k=1$ och $k=1000$.

   (a) Baserat på detta, vad kan vi säga om signalen s?

   (b) Åtminstone i en annan position i vektorn w skall det finnas ett stort tal: Var? Varför?

4. För testfunktioner i Schwartzklassen $r,s:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ och $a:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, låt

$$As(t)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}\,a(t,\nu)\,s(u)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}u,\quad R(r,s)(t,\nu)=r(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}\,\widehat{s}(\nu)^*.$$

   (a) Visa att $As(t)=f(t)\,s(t)$, då $a(t,\nu)=f(t)$.

   (b) Visa att $As(t)=g*s(t)$, då $a(t,\nu)=\widehat{g}(\nu)$.

   (c) Visa att $\langle r,As\rangle=\langle R(r,s),a\rangle$.

MS-C1421 Fourier analysis (Aalto University) Turunen
19.10.2020, 13:00–17:00

You may use computer, websites and the course material. However, the problems must be solved individually. Please indicate which sources you used.

About grading: Every exam problem will be graded from 0 to 6 points. Harmless small errors do not prevent from getting maximal points. You will get points if your answer contains at least some information (relevant definitions, pictures, calculations etc).

1. (a) What does "*Fourier integral transform preserves the energy*" mean?

   (b) Find the energy of $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, when $s(t) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t\cdot\alpha}\, \mathrm{e}^{-\alpha}\, \mathrm{d}\alpha$.

2. A 1-periodic signal $s_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ has the Fourier series presentation

$$s_1(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{s_1}(\nu)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}, \quad \text{where} \quad \widehat{s_1}(\nu) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu} s_1(t)\, \mathrm{d}t.$$

   Let us study a P-periodic signal $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (i.e. here $s(t-P) = s(t)$ for all t, where $P > 0$). Deduce the Fourier series presentation

$$s(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdots} \qquad \text{That is, answer with justifications :}$$

   (a) How to find the coefficients c_ν?

   (b) What is the exact formula for the exponential factor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\cdots}$?

   (c) Now let $s(t) = \cos(t)$. Present this signal s as Fourier series.

3. Let $s(t) \in \mathbb{R}$ be the air pressure at moment $t \in \mathbb{R}$ (time measured in seconds). Measured samples $s_k = s(k/8000)$ form the vector $v = (s_k)_{k=1}^N = (s_1, s_2, s_3, \cdots, s_N)$, where $N = 32000$. `Matlab` command `fft` computes the Fast Fourier Transform of v. Let $(X_k)_{k=1}^N = (X_1, X_2, X_3, \cdots, X_N)$ be the outcome of this computation. Suppose vector $w = (|X_k|^2)_{k=1}^N$ has exceptionally large numbers at places $k = 1$ and $k = 1000$.

   (a) Based on this, what can we say about signal s?

   (b) Also at least at some other place in vector w there should be a large number: Where? Why?

4. For Schwartz test funtions $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ and $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, let

$$As(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}\, a(t,\nu)\, s(u)\, \mathrm{d}\nu\, \mathrm{d}u, \quad R(r,s)(t,\nu) = r(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\cdot\nu}\, \widehat{s}(\nu)^*.$$

   (a) Show that $As(t) = f(t)\, s(t)$, when $a(t,\nu) = f(t)$.

   (b) Show that $As(t) = g * s(t)$, when $a(t,\nu) = \widehat{g}(\nu)$.

   (c) Show that $\langle r, As\rangle = \langle R(r,s), a\rangle$.