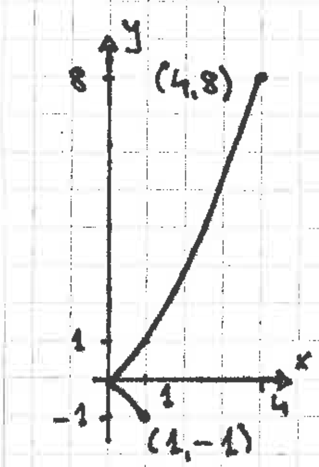
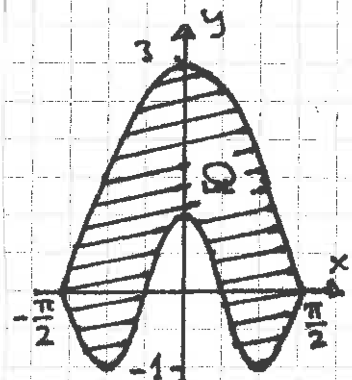
Ohjeita:
Tämä tentti on tyyppiä “open book”. Voit käyttää apuna kaikkia luento- ja verkkomateriaaleja.
Voit käyttää myös matemaattisia ohjelmistoja.
Kurssitenttiin kuuluvat tehtävät 1-5 ja silloin tulee kokonaispisteistä noin 40% kurssitentistä ja noin 60% harjoitustehtävistä. Lopputenttiin kuuluvat kaikki 6 tehtävää ja silloin tulee kokonaispisteistä 100% lopputentistä. Paras näistä kahdesta vaihtoehtoista määrää arvosanan.
Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Tee ratkaisusi käsin selvästi paperille (tai tablettitietokonella) ja lähetä ratkaisut PDF-muodossa kurssisivulla olevaan palautuslaatikkoon. Huolehdi, että joka sivulla näkyy **kurssikoodi, sukunimi, etunimi, allekirjoitus** ja **päivämäärä.**
Tentin kesto on 4h, mukaan lukien ratkaisujen skannaminen ja lähettäminen. Kokeeseen liittyvä yhteydenpito muihin ihmisiin ei ole sallittua tämän kokeen aikana.



1. Käyrä $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ kulkee pisteestä $(1, -1)$ pisteseen $(4, 8)$ origon kautta. Laske käyrän pituus, sekä tarkka arvo (5p.) että pituus pyöristetty yhden desimaalin tarkuuteen (1p.).

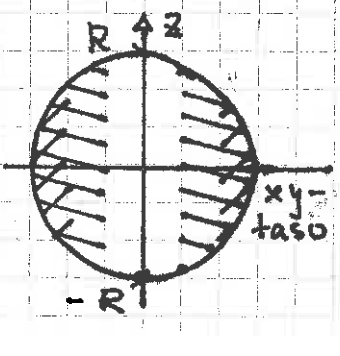
2. a) Määritä funktion $g(x, y) = 3 + \ln(x^2 + \sin y)$ ensimmäisen asteen Taylorin polynomi $P_1(x, y)$ pisteen $(a, b) = (1, 0)$ ympäristössä (2p.) ja approksimoi lukua $g(0.98, 0.03)$ luvulla $P_1(0.98, 0.03)$ (1p.).
   b) Määritä funktion $g(x, y) = 3 + \ln(x^2 + \sin y)$ toisen asteen Taylorin polynomi $P_2(x, y)$ pisteen $(a, b) = (1, 0)$ ympäristössä (2p.) ja approksimoi lukua $g(0.98, 0.03)$ luvulla $P_2(0.98, 0.03)$ (1p.).
   (Mathematica: $g(0.98, 0.03) \approx 2.99034908$)



3. Polynomi $p(x, y) = 3x^4 + 2y^6 - 12xy$ on määritelty koko xy-tasossa ja $p(x, y) \to \infty$, kun $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$, joten p:llä ei ole suurinta arvoa. Määritä p:n kriittiset pisteet ja pienin arvo. (6p.)

4. Käyrät $y = \cos(3x)$ ja $y = 3\cos(x)$ rajoittavat välillä $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tasoalueen Ω, jonka pinta-ala on $A = \iint_\Omega dA$.
   Ω:n keskiön x-koordinaatti $\bar{x} = \frac{1}{A} \cdot \iint_\Omega x dA = 0$ symmetrian takia. Määritä Ω:n pinta-ala A (1p.) ja sen keskiön y-koordinaatti $\bar{y} = \frac{1}{A} \cdot \iint_\Omega y dA$ (5p.).

5. Pallon $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ tiheys pisteessä $(x, y, z) \in B$ on $\delta(x, y, z) = \delta_0 \cdot (x^2 + y^2)/R^2$, joten $\delta_{max} = \delta_0$ (“päiväntasaajalla” xy-tasossa) ja $\delta_{min} = 0\,[kg/m^3]$ (z-akselilla). Laske pallon massa. (6p.)



6. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
   a) Määritä $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, kun $(x, y) \neq (0, 0)$. (2p.)
   b) Määritä $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ käyttämällä osittaisderivaatan määritelmää. (2p.)
   c) Määritä $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ origossa käyttämällä osittaisderivaatan määritelmää. (2p.)