Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Kurki
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0305 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 22.10.2020 klo 9.00–13.00.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Pallon $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ lämpötila riippuu vain radiaalisesta muuttujasta r muodossa $T(r) = 100\, r^a$, kun $0 \leq r \leq 1$. Millä parametrin $a > 0$ arvolla pallon keskilämpötilalle on voimassa
$$\overline{T} = \frac{1}{V} \iiint_B T\, dV = 50?$$

2. a) Laske vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = 3y\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j}$ viivaintegraali pisteestä $(0, 2)$ pisteeseen $(2, 0)$
(i) janaa $C_1\colon x = t,\ y = 2 - t$, pitkin.
(ii) origokeskisen ympyrän kaarta C_2 (lyhyempää eli neljännesympyrää) pitkin.
b) Onko vektorikentällä $\mathbf{F}$ potentiaalia?

3. Tarkastellaan kahden ympyrän väliin jäävää tasoaluetta
$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$
Laske viivaintegraali
$$\oint_{\partial D} yx^2\, dx + xy\, dy$$
Greenin kaavan avulla.

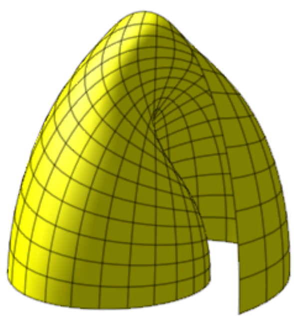
4. Tarkastellaan vektorikenttää
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z + 2x \ln y)\mathbf{i} + (x^2/y - 4y)\mathbf{j} + (x + 6z^2)\mathbf{k}.$$
a) Laske vektorikentän $\mathbf{F}$ lähteisyys (eli divergenssi) $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja pyörteisyys (eli roottori) $\nabla \times \mathbf{F}$.
b) Edellisen kohdan perusteella vektorikentällä $\mathbf{F}$ on joko skalaari- tai vektoripotentiaali. Määritä kyseinen potentiaali.

5. Arkkitehtiopiskelija on suunnitellut näyttelytilaan majan, jonka pinnalla on parametrisointi $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$,

$$\begin{cases} x = u \sin u \cos v \\ y = u \cos u \cos v \\ z = u \sin v, \end{cases}$$

jossa $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$.

```
> plot3d([u*sin(u)*cos(v), u*cos(u)*cos(v), u*sin(v)], u = 0..2*Pi, v = 0..Pi,
color=yellow, axes=none)
```



Määritä pinnan normaalivektori ja pinta-alan paikallinen suurennussuhde parametrien arvoja $u = v = \pi/2$ vastaavassa pisteessä.
Vihje: Sijoita parametrien arvot ennen ristitulon laskemista.

6. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

vuo ulospäin sylinterin

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ 1 \leq z \leq 3\}$$

reunan läpi. Voit käyttää joko Gaussin lausetta tai pintaintegraalia.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**

Course exam: Five best answers are counted.
General exam: Solve all six problems.
Those who took part in the course can also solve all six problems, and then the grade will be determined as the best of the two options: "five best exam answers + exercise points" or "six exam answers".

1. The temperature T of the ball $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ depends only on the radial variable r in the form $T(r) = 100\, r^a$ for $0 \leq r \leq 1$. Find a parameter value $a > 0$ such that the mean temperature of the ball satisfies

$$\overline{T} = \frac{1}{V} \iiint_B T\, dV = 50.$$

2. a) Calculate the line integral of the vector field $\mathbf{F}(x, y) = 3y\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j}$ from the point $(0, 2)$ to the point $(2, 0)$
   (i) along the line segment $C_1 \colon x = t,\ y = 2 - t$.
   (ii) along the circular arc C_2 (the shorter arc = quarter of a circle).
   b) Does the vector field $\mathbf{F}$ have a potential?

3. We consider the planar set

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

   between two circles. Calculate the line integral

$$\oint_{\partial D} yx^2\, dx + xy\, dy$$

   by using the Green's Theorem.

4. We consider the vector field

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z + 2x \ln y)\mathbf{i} + (x^2/y - 4y)\mathbf{j} + (x + 6z^2)\mathbf{k}.$$

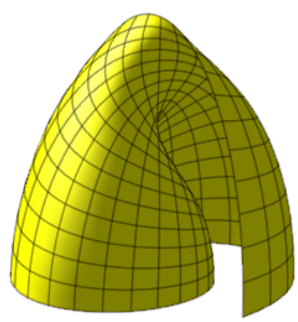
   a) Calculate the divergence $\nabla \cdot \mathbf{F}$ and curl (rotation) $\nabla \times \mathbf{F}$ of the vector field $\mathbf{F}$.
   b) The previous part implies that $\mathbf{F}$ has either a scalar or a vector potential. Find this potential.

5. A student of Architecture has designed a hut whose surface has the parametrization $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$,

$$\begin{cases} x = u \sin u \cos v \\ y = u \cos u \cos v \\ z = u \sin v, \end{cases}$$

where $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$.

```
> plot3d([u*sin(u)*cos(v), u*cos(u)*cos(v), u*sin(v)], u = 0..2*Pi, v = 0..Pi,
color=yellow, axes=none)
```



Find the normal vector of the surface and the local streching factor (scale factor) of surface area at the point corresponding to the parameter values $u = v = \pi/2$.
Hint: Substitute the parameters before calculating the cross product.

6. Calculate the flow of the vecrtor field

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

out of the surface of the cylinder

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ 1 \leq z \leq 3\}.$$

You can use either the Divergence Theorem or a surface integral.