MS-A0003 Matriisilaskenta (Aalto-yliopisto) Turunen / Helander
8.12.2020, 16:30–20:30

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Voit käyttää laskinta (tai Matlabia) ja kurssin materiaalia. Perustele ratkaisusi: pelkkä lopputulos ei riitä. Koetehtävät on ratkottava itsenäisesti. Kerro mitä lähteitä käytit ratkaisuissasi.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Todista Gauss-eliminoinnin avulla seuraavat väitteet:

   (a) Ongelmalla $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$ ei ole ratkaisuja $x = (x_1, x_2, x_3)$.

   (b) Ongelmalla $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ on äärettömän monta ratkaisua.

2. Tarkastellaan vektorien $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ristituloa $w := u \times v \in \mathbb{R}^3$ eli $w = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

   (a) Näytä laskemalla, että w on kohtisuorassa vektoreita u ja v vastaan.

   (b) Näytä laskemalla, että $\|w\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2$.

   (c) Oletetaan lisäksi, että u ja v ovat molemmat normiltaan 1 ja että ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Näytä, että silloin $\|w\| = 1$.

3. Olkoot $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ kuten edellisen tehtävän c-kohdassa. Olkoon

$$[M] := \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   Näytä laskemalla, että $[M]^* = [M]^{-1}$ (eli tässä adjungaatti on käänteismatriisi).

4. Olkoon matriisi $[M]$ kuten edellisessä tehtävässä. Olkoon $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sellainen lineaarikuvaus, jolle $Au = 4u$, $Av = 5v$ ja $Aw = 6w$.

   (a) Etsi matriisin $[A] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ unitaarinen diagonalisointi.

   (b) Etsi matriisin $[A] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ singulaariarvohajoitelma (eli SVD).

   (Huom! Tehtävän vastauksissa esiintyy lukuja $u_k, v_k, w_k, 4, 5, 6 \in \mathbb{R}$.)