TENTAMEN,
MATRISRÄKNING,
MS-A0009

- Tid: 16:30–20:30
- Du får använda valfritt material, men att kommunicera med andra angående tentamen under dess gång är förbjudet.
- Du måste skriva dina lösningar för hand.
- Ditt namn och studentnummer måste vara synligt på varje sida.
- Varje uppgift ger högst fyra poäng. Hela tentamen ger högst 20 poäng.
- Motivera dina lösningar noggrannt. Svar utan motivering ger inga poäng.

Uppgift 1

Betrakta ekvationen $z^4 = -1$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Visa att $z = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ är en lösning till ekvationen. (1p)
b) Finn alla lösningar till ekvationen. (3p)

Dagens matris

I alla de tre följande uppgifterna studerar vi samma matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

och vi betecknar dess kolonnvektorer

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Uppgift 2

a) Beräkna inversen A^{-1}. (1p)

b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 3x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{cases}$ (1p)

c) Beräkna en faktorisering

$$A = LDU,$$

där L är nedre triangulär, D är en diagonalmatris, U är övre triangulär, och där diagonalerna i L och U består av endast ettor och nollor. (2p)

Uppgift 3

Låt $V = \operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, och låt $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonalprojektion till V. Bestäm matrisrepresentationen för φ. (4p)

Uppgift 4

a) Beräkna alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till A. (2p)

b) Beräkna

$$\sum_{k=1}^{60} \frac{1}{3^k} A^k$$

och förenkla svaret så långt som möjligt. (Tips: Studera udda och jämna potenser av A var för sig.) (2p)

Uppgift 5

En *Hadamardmatris* är en kvadratisk matris innehållande talen ± 1, vars kolonner är parvis ortogonala. Till exempel är matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

en (4×4) Hadamardmatris.

Låt nu H vara en godtycklig $(n \times n)$ Hadamardmatris med kolonner $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n$.

a) Visa att $H^T H = nI_n$, där I_n är $(n \times n)$-identitetsmatrisen. (1p)

b) Visa att även raderna i H är parvist ortogonala. (1p)

c) Visa att $\det H = n^{n/2}$. (1p)

d) Låt $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \cdots + \mathbf{h}_n$. Visa att $\|\mathbf{h}\| = n$. (1p)