MS-C2111 Stokastiset prosessit	**Tentti**
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos	2020-12-09
Aalto-yliopisto	L Leskelä

Tämä etätentti on tarkoitettu itsenäisesti suoritettavaksi. **Ryhmätyöskentely on ankarasti kielletty**. Tarkemmat ohjeet löytyvät MyCourses-sivustolta. Tentissä on 4 tehtävää, kukin arvoltaan 0–6 pistettä.

1. Lumimyräkkään eksynyt Joulupukki etenee Markov-ketjun mukaisesti siirtymämatriisina

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Joulupukki aloittaa tunturin laelta (tila 3) ja pyrkii kotiin (tila 2). Matkan aikana hän toivoo käyvänsä saunalla (tila 5) ja välttävänsä karhunpesää (tila 4).

(a) Millä todennäköisyydellä Joulupukki lopulta pääsee kotiin? **(2 p)**

(b) Millä todennäköisyydellä Joulupukki ei koskaan käy saunalla? **(1 p)**

(c) Kaunko odotusarvoisesti kestää, ennen kuin Joulupukki päätyy tilajoukkoon $\{2, 4\}$? **(2 p)**

(d) Onko mahdollista, että Joulupukki vaeltaa lumimyräkässä ikuisesti päätymättä koskaan kotiin tai karhunpesään? **(1 p)**

2. Olkoon $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ diskreettiaikainen Markov-ketju tilajoukossa $\{-1, 0, +1\}$, jonka alkujakauma on $\pi = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ja siirtymämatriisi

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

jossa rivit ja sarakkeet numeroidaan luvuin $-1, 0, +1$. Mitkä seuraavista ovat Markov-ketjuja? Niille jotka ovat, määritä tilajoukko ja siirtymämatriisi. Niille jotka eivät ole, perustele miksi.

(a) $A_t = X_{2t}$, **(2 p)**

(b) $B_t = 2X_t$. **(2 p)**

(c) $C_t = X_t^2$. **(2 p)**

Jatkuu seuraavalla sivulla...

3. Sairaalan teho-osastolla on neljä vuodepaikkaa. Uusia potilaita saapuu teho-osastolle satunnaisina ajanhetkinä keskimäärin 0.3 päivässä. Potilaat, jotka saapuvat kaikkien vuodepaikkojen ollessa varattuina, ohjataan toiseen sairaalaan. Potilaat viipyvät teho-osastolla keskimäärin 10 päivää. Saapumisten väliajat ja teho-osastolla viipymäajat ovat keskenään riippumattomia ja eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia.

(a) Olkoon X_t varattujen sänkyjen lukumäärä ajanhetkellä t. Tällöin (X_t) on Markov-ketju. Määritä sen tilajoukko, siirtymäkaavio ja generaattorimatriisi. **(2 p)**

(b) Mikä on tasapainotilassa todennäköisyys sille, että teho-osastolla on vapaita vuodepaikkoja? **(2 p)**

(c) Eräänä kiireisenä maanantaiaamuna sairaalan johtaja havaitsee kaikkien vuodepaikkojen olevan varattu ja päättää, että uusia potilaita ei oteta vastaan ennen kuin vähintään kaksi vuodepaikkaa on vapautunut. Kauanko odotusarvoisesti kestää, ennen kuin näin tapahtuu? **(2 p)**

4. Uusi tauti leviää Minottin kaupungissa, joka on niin suuri, että epidemiologit ovat päättäneet mallintaa sitä äärettömänä populaationa. Päivän 0 aamuna yksi henkilö on tartuttava ja muut ovat alttiita taudille. Kaikki tartuttavuusajat ovat yhden vuorokauden mittaisia. Kunakin päivänä jokainen tartuttava henkilö kohtaa kaksi altista henkilöä ja päivän päättyessä tartuttava yksilö paranee saavuttaen immuniteetin. Jokainen kohtaaminen on tartuttava todennäköisyydellä $a = 3/4$, muista kohtaamisista riippumattomasti. Tartuttavan kohtaamisen seurauksena altis henkilö muuntuu tartuttavaksi seuraavan päivän aamuna.

(a) Olkoon X_t tartuttavien henkilöiden lukumäärä päivän $t = 0, 1, 2, \ldots$ alussa. Tällöin (X_t) voidaan mallintaa haarautumisprosessina. Mikä on lisääntymisjakauma? **(1 p)**

(b) Määritä R_0 eli niiden henkilöiden odotusarvoinen lukumäärä, jotka saavat tartunnan suorassa kohtaamisessa alkuhetkellä tartuttavana olevan henkilön kanssa. **(1 p)**

(c) Millä todennäköisyydellä epidemia lopulta häviää niin, että eräänä päivänä väestössä ei ole lainkaan tartuttavia yksilöitä? **(2 p)**

(d) Eräänä joulukuun aamuna kaikki ihmiset testataan 100% tarkalla testillä, jonka mukaan 300 ihmistä on tartuttavia ja mitättömän pieni osuus väestöstä on parantunut. Mikä on tämän havainnon valossa todennäköisyys sille, että epidemia lopulta häviää? **(1 p)**

(e) Määritä kaikki reaaliluvut $r \in [0, 1]$, joille r^{X_t} on martingaali. **(1 p)**

This is a remote exam to be done independently. **Team work is strictly forbidden**. More detailed instructions are available in MyCourses. The exam contains 4 problems each worth 6 points.

1. Yulebock, lost in a snowstorm, moves according to a Markov chain with transition matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Yulebock starts on top of a mountain (state 3) and wants to reach home (state 2). He hopes to visit his sauna (state 5) on the way, while avoiding a bear's den (state 4).

(a) What is the probability that Yulebock eventually reaches home? **(2 p)**

(b) What is the probability that Yulebock never visits his sauna? **(1 p)**

(c) What is the expected duration until Yulebock ends up in $A = \{2, 4\}$? **(2 p)**

(d) Is it possible that Yulebock remains wandering in the snowstorm forever, without ever reaching home or the bear's den? **(1 p)**

2. Let $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ be a discrete-time Markov chain in state space $\{-1, 0, +1\}$ with initial distribution $\pi = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ and transition matrix

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

having rows and columns indexed using $-1, 0, +1$. Which of the following are Markov chains? For those which are, write down the state space and transition matrix. For those which are not, explain why.

(a) $A_t = X_{2t}$, **(2 p)**

(b) $B_t = 2X_t$. **(2 p)**

(c) $C_t = X_t^2$. **(2 p)**

Continues on next page...

3. An intensive care unit in a hospital has four beds. New patients requiring intensive care arrive at random time instants with an average rate of 0.3 per day. Patients arriving while all beds are occupied are redirected to another hospital. Each patient remains in the intensive care unit for an average of 10 days. The interarrival and sojourn times of patients are modelled as mutually independent and exponentially distributed random variables.

(a) Let X_t be the number of occupied beds at time t. Then (X_t) is a Markov chain. Write down its state space, transition diagram, and generator matrix. **(2 p)**

(b) What is the equilibrium probability that the intensive care unit has beds available? **(2 p)**

(c) On a busy Monday morning a hospital manager observes that all beds of the intensive care unit are occupied, and decides that no new patients are accepted until two beds have become vacant. What is the expected waiting time until this happens? **(2 p)**

4. A new disease spreads in the city of Minotti which has so many people that epidemiologists have decided to model it as a population of infinite size. In the morning of day zero, one person is infectious and the rest are susceptible for the disease. All infectious periods last for one day. During each day, every infectious individual contacts two susceptible persons, and in the evening the infectious individual recovers and becomes immune. Each contact is infectious with probability $a = 3/4$, independently of other contacts. If a contact is infectious, then the targeted susceptible person becomes infectious in the morning of the next day.

(a) Let X_t be the number of infectious individuals in the beginning of day $t = 0, 1, 2, \ldots$ Then (X_t) can be modelled as a branching process. What is the offspring distribution? **(1 p)**

(b) Compute R_0, the expected number of people who directly receive the infection from the initially infected person. **(1 p)**

(c) What is the probability that the epidemic eventually dies out, so that on some day there will be no infectious people in the population? **(2 p)**

(d) During one December morning, all citizens are tested using a 100% reliable test which shows that 300 people are infectious, and a negligible fraction of the population has recovered. What is the probability that the epidemic eventually dies out, given this observation? **(1 p)**

(e) Determine all real numbers $r \in [0, 1]$ for which r^{X_t} is a martingale. **(1 p)**