Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (Alestalo)
MS-A0102 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (Malinen)
MS-A0103 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (Malinen)
MS-A0104 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (Alestalo)

Kurssitentti ja yleinen tentti 10.12.2020 klo 9.00–13.00.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

Eri kohtien pisteet jakautuvat tasan, ellei muuta ole merkitty.

Kirjoita kurssin koodi 1. vastaussivun yläreunaan ja ilmoita, jos sinulla on laskuharjoituspisteitä joltakin I-periodin kurssilta.

1. a) Määritä sarjan
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{5^k}$$
summa.
b) Suppeneeko sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+3}?$$
c) Määritä potenssisarjan
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{9^k} x^k$$
suppenemissäde.

2. Määritä raja-arvot
$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^3+4n^2+n-6} \quad \text{ja} \quad \text{b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x^3+4x^2+x-6}.$$

3. Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + \sin 2x$.
a) Muodosta funktion f kolmannen asteen Maclaurin-polynomi $P_3(x)$.
Huom: Maclaurin = Taylor tapauksessa $x_0 = 0$.
b) Osoita, että funktio f on aidosti kasvava.
c) Määritä käänteisfunktion derivaatta
$$(f^{-1})'(3\pi).$$

4. a) Määritä osamurtohajotelman

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

kertoimet A ja B. (2 p.)
b) Laske integraali

$$\int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

sijoittamalla ensin $x = \ln t$. (4 p.)

5. a) Eräs henkilö on opetellut ulkoa 12 000 ensimmäistä desimaalia luvusta π. Hetkellä $t = 0$ (kuukautta) kiinnostus aiheeseen lopahtaa, jolloin muistissa olevien desimaalien lukumäärä $y = y(t)$ alkaa vähentyä differentiaaliyhtälön $y' = -ky$ mukaisesti. Määritä vakion k tarkka arvo, kun $y(0) = 12\,000$ ja $y(12) = 4\,000$.
b) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = -y^2$ alkuehdolla $y(0) = 10$.

6. Funktiot $y(x) = x^2$ ja $y(x) = x^3$ toteuttavat saman differentiaaliyhtälön

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0. \tag{1}$$

a) Sijoita annetut ratkaisut differentiaaliyhtälöön (1) ja määritä sitten kertoimet α ja β.
b) Kiinnitetään vakioille α ja β kohdassa a) saadut lukuarvot. Muodosta differentiaaliyhtälölle (1) sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y(1) = 2$ ja $y'(1) = 0$.

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: II-periodin luentokurssin kurssitentin voi uusia III-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**