

PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka  
Tentti 16.12.2020

Ratkaisut palautetaan MyCourses-laatikkoon 16.12 kello 13:00 mennessä yhdellä pdf-tiedostolla

- Vastaa lyhyesti, mutta perustellusti seuraaviin kohtiin. (a-d 1 pistettä per tehtävä. e) kohdasta 2 pistettä.)
  - Mitä tarkoitetaan kvanttimekaniikassa degeneraatiolla?
  - Jos systeemi on alussa energian ominaistilassa  $\phi(x)$ , jolla on energia  $E$ , mikä on sen aikakehitys?
  - Jos meillä on operaattori  $\hat{O}$  ja tilat  $\phi$ ,  $f$ , ja  $\psi$ , onko  $\hat{O}\langle f|\hat{O}|\phi\rangle|\psi\rangle$  ket-vektori, bra-vektori vai skalaari (eli luku)?
  - Osoita ei-degeneroidussa tapauksessa, että jos kaksi hermiittistä operaattoria  $\hat{A}$  ja  $\hat{H}$  kommutoivat keskenään, niin niillä on yhteiset (ei-triviaalit) ominaisfunktiot.
  - Selitä sanoin mitä tarkoittaa  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle|. \quad (1)$$

(2. pisteen tehtävä)

- Tarkastellaan  $m$ -massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaaliuopassa, jolle  $V = 0$ , kun  $0 \leq x \leq L$ , muulloin  $V = \infty$ . Hiukkasen Hamiltonin operaattorin  $\hat{H}$  ortonormeeratut ominaisfunktiot (välillä  $0 \leq x \leq L$ ) ovat

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2)$$

a) Miksi Hamiltonin operaattorin (eli energian) ominaistilat ovat kuten yllä? Mitkä ovat niitä vastaavat energian ominaisarvot? (2p.) (Vihje:  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ .)

b) Oletetaan, että hiukkasen tilafunktio ajanhetkellä  $t = 0$  on

$$\Psi(x, 0) = C [\phi_1(x) + i\phi_2(x)/3]. \quad (3)$$

Määritä kerroin  $C$  ja ratkaise hiukkasen tila  $\Psi(x, t)$  ajanhetkellä  $t$ . (2 p.)

c) Miten laskisit hiukkasen paikan varianssin, kun aaltofunktio on sama kuin yllä eli  $\Psi(x, t)$ ? (Ei tarvitse laskea loppuun vaan kertoa mistä laskusta tuloksen saisi.) (2 p.)

**KÄÄNNÄ SIVUA**

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa Hamiltonin operaattori on siis  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ . Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0} \right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0} \right), \quad (4)$$

missä  $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ .

- a) Käyttäen  $\hat{x}$ :n ja  $\hat{p}$ :n peruskommutaatiorelaatiota johda kommutaatiorelaatio  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ . (1p.)
- b) Osoita, että Hamiltonin operaattori on  $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ . (3 p.)
- c) Oletetaan, että tarkasteltava systeemi on ominaistilassa  $|n\rangle$ . Mitkä ovat silloin liikemäärän odotusarvo ja varianssi. (2p.)

Apuna:

- $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
- $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

4. Hilbertin avaruuden kanta muodostuu ortonomaaleista tiloista  $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ja  $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Mittaamme spiniä y-suunnassa jota vastaa operaattori

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Mitkä ovat mahdollisia mittaustuloksia ja mitkä ovat niitä vastaavat ominaistilat? (2p.)

- b) Jos systeemi on tilassa  $|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}[|\uparrow\rangle - \frac{1}{2}|\downarrow\rangle]$ , millä todennäköisyydellä eri  $\sigma_y$ :n mittaustulokset esiintyvät? (4p.)
5. Kun vapaa varattu hiukkanen (varaus  $q$ ) asetetaan magneettikenttään voidaan tilannetta vastaava Hamiltonin operaattori saada vapaan hiukkasen Hamiltonin operaattorista korvaamalla liikemäärä  $\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}$ , missä  $\mathbf{A}$  on vektoripotentiali (josta magneettikentän saisi laskemalla roottorin  $\nabla \times \mathbf{A}$ ). Tarkastele yksiulotteista ongelmaa missä mukana pidetään vain x-komponentti ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.
- a) Mikä Hamiltonin operaattori kuvaa hiukkasen käytöstä? (2 p.)
- b) Olettaen, että vektoripotentiali  $A_x$  aiheuttaa "pienen" häiriön vapaan hiukkasen käyttöseen, mikä Hamiltonin operaattori kuvaa systeemin käytöstä? Mikä on siinä häiriö ja mikä kuvaa vapaata hiukkasta? (2 p.)
- c) Laske edellistä kohtaa käyttäen, ensimmäisen kertaluvun korjaus ominaisenergioihin. (2 p.)

*Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi.*