Ohjeita:

Tämä tentti on tyyppiä "open book". Voit käyttää apuna kaikkia luento- ja verkkomateriaaleja.
Voit käyttää myös matemaattisia ohjelmistoja.
Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Tee ratkaisusi käsin selvästi paperille (tai tablettitietokoneella) ja lähetä ratkaisut PDF-muodossa kurssisivulla olevaan palautuslaatikkoon. Huolehdi, että joka sivulla näkyy **kurssikoodi**, **sukunimi**, **etunimi**, **allekirjoitus** ja **päivämäärä**.
Tentin kesto on 4h, mukaan lukien ratkaisujen skannaaminen ja lähettäminen. Kokeeseen liittyvä yhteydenpito muihin ihmisiin ei ole sallittua tämän kokeen aikana.

1. Diskreetit satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 ovat riippumattomat ($X_1 \perp X_2$) ja samalla tavalla jakautuneita perusjoukolla $S_X = \{-1, 0, 1\}$ ja tiheysfunktiolla $f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{3}$, kun $k \in S_X$.
Muodostamme uudet diskreetit satunnaismuuttujat $U = X_1 + X_2$ ja $V = X_1 \cdot X_2$.
a) Laske odotusarvot $\mu_U = \mathbb{E}(U)$ ja $\mu_V = \mathbb{E}(V)$. (1p.)
b) Laske $\mathbb{P}(U = 0|V = 0)$ ja $\mathbb{P}(V = 0|U = 0)$. (1p.)
c) Laske kovarianssi $Cov(U, V)$. (1p.)
d) Ratkaise ovatko U ja V riippumattomat ($U \perp V$) tai riippuvaiset ($U \not\perp V$). (1p.)

2. Jatkuvalla satunnaismuuttujalla Y on perusjoukko $S_Y = [0, 1]$ ja tiheysfunktio
$$f_Y(y) = \begin{cases} 12y^2(1-y) & , y \in S_Y, \\ 0 & , y \notin S_Y. \end{cases}$$
a) Laske odotusarvo $\mu_Y = \mathbb{E}(Y)$. (1p.)
b) Olkoon satunnaismuuttuja $W = Y^2$. Laske odotusarvo $\mu_W = \mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(Y^2)$. (1p.)
c) Laske keskihajonta $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$. (1p.)
d) Laske $\mathbb{P}(Y \in [\mu_Y - 2\sigma_Y, \mu_Y + 2\sigma_Y])$. (1p.)

3. Olkoon diskreetti satunnaismuuttuja X silmälukujen summa, kun tavallista 6-sivuista noppaa heitetään 120 kertaa, joten $S_X = \{120, 121, 122, \ldots, 719, 720\}$. Approksimoi todennäköisyys $\mathbb{P}(X \in [400, 450])$ käyttämällä *normaaliapproksimaatiota* ja jatkuvuuskorjausta. (4p.)
(Jos U on diskreetti satunnaismuuttuja, joka saa kokonaislukuarvoja ja V on diskreettiä satunnaismuuttujaa U arvioiva jatkuva satunnaismuuttuja, voidaan todennäköisyyttä $\mathbb{P}(U = k)$ approksimoida todennäköisyydellä $\mathbb{P}(k - \frac{1}{2} < V < k + \frac{1}{2})$. Tätä kutsutaan jatkuvuuskorjaukseksi ja se antaa yleensä parempia likiarvoja kuin $\mathbb{P}(k-1 < V < k)$ tai $\mathbb{P}(k < V < k+1)$.)

4. Kun $n = 2500$ satunnaisesti valitun aikuisen suomalaisen pituudet x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ mitattiin, saatiin keskiarvo $m(\bar{x}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 170.9cm$ ja
otoskeskihajonta $sd_S(\bar{x}) = (\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - m(\bar{x}))^2)^{1/2} = 11.4cm$.
Määritä otoksen avulla symmetrinen approksimatiivinen 99% luottamustason väliestimaatti aikuisten suomalaisten keskipituudelle. (4p.)

5. Diskreetti satunnaismuuttuja X, jonka perusjoukko on $S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja tiheysfunktio $f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, kun $k \in S_X$, missä $\lambda > 0$, sanotaan *Poisson*-jakautuneeksi parametrilla λ. Tätä merkitään $X \sim Po(\lambda)$.
Johda kaava λ:n suurimman uskottavuuden estimaatille λ^*_{ML}, joka saadaan satunnaismuuttujan X riippumattomasta otoksesta $\bar{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (3p.) ja laske λ^*_{ML} tapauksessa että $\bar{x} = \{0, 3, 1\}$ (1p.).

6. Teemu Teekkari tutki erästä Poisson-jakautunutta satunnaismuuttujaa $X \sim Po(\lambda)$, missä parametri $\lambda > 0$. Hän ajatteli λ:n arvon olevan eräs jatkuva satunnaismuuttuja Λ, jonka perusjoukko $S_\Lambda =]0, \infty[$ ja jonka priori-jakaumaksi hän arvioi
$$p_0(\lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda} & , \lambda \in S_\Lambda, \\ 0 & , \lambda \notin S_\Lambda. \end{cases}$$
Hän päätti ottaa otoksen $\bar{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$, laskea sen perusteella posteriori-jakauman $p_1(\lambda)$ ja käyttää λ:n estimaattina posteriori-jakauman odotusarvoa.
Hän sai otoksen $\bar{x} = \{0, 3, 1\}$. Laske vastaavaa posteriori-jakauma (3p.) sekä estimaatti λ:lle (1p.).