

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu  
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

**MS-A0204 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2** (Alestalo/Jakobsson)

**MS-A0205 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2** (Malinen/Autio)

**Kurssitentti ja yleinen tentti 22.2.2020** klo 9.00–13.00.

**Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.**

**Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.**

Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x}, \text{ kun } x \neq 0.$$

Laske funktion  $f(x, y)$  suunnattu derivaatta ellipsin

$$2x^2 + y^2 = 1$$

yksikkönormaalin suuntaan (kaikissa niissä ellipsin pisteissä, joissa  $x \neq 0$ ).

2. Määritä pinnan

$$x^2 - 2xy + y^5 - z = 0$$

pisteeseen  $(1, 1, 0)$  asetetun tangenttitason yhtälö.

3. Funktioista  $g(t)$  ja  $h(t)$  tiedetään ominaisuudet

$$g(2) = 3, \quad h(2) = 4, \quad g'(2) = 5, \quad h'(2) = 6,$$

ja funktiosta  $f(x, y)$  osittaisderivaatat

$$f_x(3, 4) = 7 \text{ ja } f_y(3, 4) = 8.$$

Laske yhdistetyn funktion  $f(g(t), h(t))$  derivaatta kohdassa  $t = 2$ .

4. Määritä funktion

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

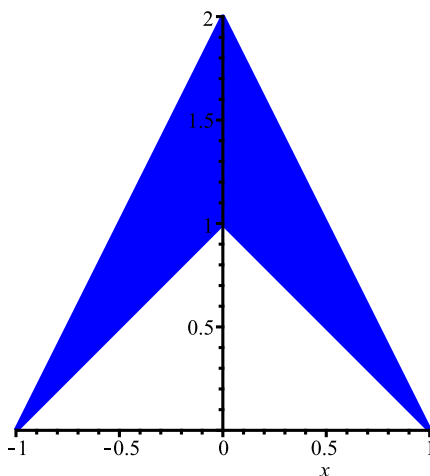
suurin ja pienin arvo pallopinnalla  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .

5. Tarkastellaan kuvion mukaista tasojoukkoa  $N =$  nuolenkärki.
- Muodosta joukon  $N$  oikean puolen reunajanojen yhtälöt välillä  $0 \leq x \leq 1$ .
  - Laske joukon  $N$  keskiön  $y$ -koordinaatti

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_N y \, dA.$$

Missä keskiö sijaitsee?

Vihje: Symmetrian vuoksi riittää laskea tasointegraali vain joukon  $N$  oikeassa puolikkaassa.



6. Olkoon

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$$

eli yksikköympyrän ulkopuoli. Laske epäoleellinen tasointegraali

$$\iint_D \frac{dA}{(1 + x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

esimerkiksi napakoordinaatteja käyttämällä.

**Huom. 1:** Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

**Huom. 2:** Kurssitentint voi uusia seuraavan tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet otetaan huomioon ja parempi tulos jää voimaan. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.