Aalto-yliopisto

MS-A0004 Matriisilaskenta, periodi I, 2020

Loppukoe ja tentti, 22.10.2020 klo 9.00–13.00

Kokeessa saa käyttää kaikkia apuvälineitä, mutta sen aikana ei saa kommunikoida muiden kanssa. Ratkaisuista täytyy käydä ilmi välivaiheet, joiden kautta lopputulokseen on päädytty käsin laskien, jollei tehtävänannossa muuta mainita.

Jos suoritat loppukokeen, vain neljä eniten pisteitä tuottavaa ratkaisuasi huomioidaan kurssin loppuarvostelussa yhdessä laskuharjoituspisteiden kanssa. Jos suoritat tentin, kaikkien viiden tehtävän ratkaisut huomioidaan arvostelussa; tällöin laskuharjoituspisteitä ei puolestaan huomioida. Parempi näistä kahdesta suorituksesta jää voimaan.

Tehtävä 1: a) Olkoot $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = -2\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$. Määritä $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Mikä on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma? (*2p.*)

b) Esitä kompleksiluku $(1 - \mathrm{i})^7$ napakoordinaateissa siten, että napakulma on välillä $]-\pi, \pi]$ (*2p.*)

c) Etsi determinantin avulla ne vakiot $c \in \mathbb{R}$, joilla matriisi

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & c \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ei ole kääntyvä. (*2p.*)

Tehtävä 2: a) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 1 \end{cases} .$$

Mitä saamasi vastaus kertoo yhtälöiden määrittämien tasojen sijainnista avaruudessa? (*3p.*)

b) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases} ,$$

mikäli mahdollista. Päättele tämän perusteella, voidaanko vektori $[1, 2, -1]^T$ antaa vektorien $[1, 1, 3]^T$, $[1, 2, 5]^T$ ja $[1, 4, 9]^T$ lineaarikombinaationa. Perustele vastauksesi. (*3p.*)

Tehtävä 3: Matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad C = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

esittävät lineaarikuvauksia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Matriisi A esittää siis kuvausta F, B esittää kuvausta G ja C esittää kuvausta H.

a) Mikä matriisi esittää yhdistettyä lineaarikuvausta $F \circ F \circ G \circ H$, jossa annettuun vektoriin suoritetaan ensin kuvaus H, sitten kuvaus G ja lopuksi vielä kahdesti kuvaus F? Toisin sanoen määritä matriisi D, jolle pätee $D\mathbf{x} = F(F(G(H(\mathbf{x}))))$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$? *(3p.)*

b) Laske a)-kohdassa muodostamasi matriisin D käänteismatriisi Gaussin eliminaatiolla tai vaihtoehtoisesti käyttäen hyväksi tietoa

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

ja järkeilemällä A:n ja B:n käänteismatriisit. *(3p.)*

Tehtävä 4: Diagonalisoi matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Ominaisarvot määrittävän polynomiyhtälön saa halutessaan ratkaista käyttäen apuvälineitä, mutta kyseinen yhtälö täytyy kuitenkin muodostaa käsin laskien.)

Vihje: Yksi B:n ominaisarvoista on nolla. Lisäksi B on symmetrinen, mikä mahdollistaa unitaarisen diagonalisoinnin.

Tehtävä 5: Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tiedetään, että matriisilla A^TA on ortonormaalit ominaisvektorit $(0,1)^T$ ja $(1,0)^T$ ja matriisilla AA^T on ortonormaalit ominaisvektorit $(2/3, 2/3, 1/3)^T$, $(-2/3, 1/3, 2/3)^T$ ja $(1/3, -2/3, 2/3)^T$.

a) Määritä matriisin A singulaariarvot. *(2p.)*

b) Kirjoita matriisille A singulaariarvohajotelma? Tarkista vastauksesi matriisikertolaskulla. *(2p.)*

c) Kirjoita matriisille A singulaariarvohajotelman avulla "rangia 1" oleva approksimaatio, jossa jätät pienemmän singulaariarvon huomiotta. *(2p.)*