Grundkurs i sannolikhetskalkyl och statistik
MS-A0501, MS-A0502, MS-A0503, MS-A0504, MS-A0509 — Tentamen
Institutionen för matematik och systemanalys — 24.2.2021
Aalto-universitetet — J Kohonen, G Metsalo

Instruktioner: Svara kort och tydligt, men motivera dina lösningar. Enbart ett numeriskt svar ger inga poäng. Det finns fyra frågor i denna tentamen, var och en med 0–6 poäng.

Skriv dina lösningar tydligt för hand, antingen på papper eller på en tablettdator och skicka in lösningarna på PDF-form till inlämningslådan på tentamenssidan. Se till att kurskod, efternamn, förnamn, studienummer och datum syns på alla svarspapper.

I slutet av tentamen finns en tabell med standardnormalfördelningens fördelningsfunktion.

T1 Petter och Lotta spelar följande spel. De lägger varsin penninginsats i potten, möjligtvis olika stora. Sedan kastar de en vanlig 6-sidig tärning. Om ögonantalet är 1 eller 2, vinner Lotta omgången, men om ögonantalet är 3, 4, 5 eller 6, vinner Petter omgången. Den, som först vinner två omgångar, vinner spelet och potten.

(a) Ur reglerna följer att spelet varar två eller tre omgångar. Bestäm väntevärdet för antalet omgångar. **(2p)**

(b) Före spelet lägger Petter insatsen 20 euro i potten. Hur stor insats skall Lotta lägga för att spelet skall vara rättvist, dvs. så att vardera spelarens insats är proportionell mot vinstsannolikheten? **(2p)**

(c) Lotta vann första omgången, men sedan nappade hunden Prick åt sig tärningen och sprang iväg med den, så Petter och Lotta kunde inte fortsätta spelet. De bestämde sig för att dela upp potten i proportion mot deras respektive vinstsannolikhet. Beräkna hur de delade upp potten. **(2p)**

Historisk fotnot: Denna uppgift tar oss till sannolikhetskalkylens vagga! På 1600-talet presenterade fransmannen de Méré ett analogt problem. Blaise Pascal och Pierre de Fermat lade den matematiska grunden till sannolikhetskalkylen då de löste detta problem.

T2 Rymdskeppets motor är i gång under tiden T (sekunder) och den ger upphov till accelerationen $a = 2\ \mathrm{m/s}^2$. Under accelerationen färdas rymdskeppet sträckan $X = \frac{1}{2}aT^2$. Tiden T är en kontinuerlig slumpvariabel, som är likformigt fördelad i intervallet $I = [100,\ 150{+}r]$, där r är **första siffran** i ditt studienummer (en av siffrorna $0, \ldots, 9$; bortse från eventuella bokstäver). Ange tydligt värdet på r i din lösning och använd detta siffervärde i beräkningarna.

(a) Beräkna väntevärdet för den färdade stäckan. **(2p)**

(b) Beräkna sannolikheten att den färdade sträckan är över 20 000 meter. **(2p)**

(c) Beräkna standardavvikelsen för den färdade sträckan. **(1p)**

(d) Tio rymdskepp skickas iväg, vilkas motorer är igång tiderna $T_1, \ldots, T_{10}$, som är oberoende och likformigt fördelade i intervallet I. Beräkna sannolikheten att exakt tre av rymdskeppen färdas över 20 000 meter under accelerationen. **(1p)**

T3 Låt s vara **sista siffran** i ditt studienummer (en av siffrorna $0, \dots, 9$; bortse från eventuella bokstäver). Ange tydligt värdet på s i din lösning och använd detta siffervärde i beräkningarna.

I en påse finns 100 slantar, av vilka 98 är rättvisa (krona med sannolikheten 0.5). En ger krona med sannolikheten 0.6 och en med sannolikheten 0.4. En slant plockas slumpmässigt ur påsen och dess sannolikhet att ge krona är en okänd parameter Θ.

(a) Vad är sannolikheten att få enbart kronor, om denna slant singlas $30 + s$ gånger? (Svaret skall vara ett tal, inte ett uttryck som innehåller Θ.) **(1p)**

(b) Slanten har singlats $30 + s$ gånger och man har fått enbart kronor. Beräkna posteriori-fördelningen för parametern Θ. **(2p)**

(c) Beräkna moden (MAP-estimatet) för Θ:s posteriori-fördelning från b-delen. **(1p)**

(d) Beräkna väntevärdet för Θ:s posteriori-fördelning från b-delen. **(1p)**

(e) Om samma slant singlas ytterligare tre gånger, vad är sannolikheten att få enbart kronor? **(1p)**

T4 Chebyshevs olikhet säger att om X är en slumpvariabel med väntevärdet $\mu_X \in \mathbb{R}$ samt standardavvikelsen $\sigma_X \in]0, \infty[$ och $k \geq 1$, så är $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq k \cdot \sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, så i synnerhet har vi i fallet $k = \sqrt{2}$ att

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq \sqrt{2} \cdot \sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}. \tag{$*$}$$

Verifiera (utan att använda Chebyshevs olikhet) att påståendet $(*)$ stämmer i nedanstående tre fall genom att beräkna $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq \sqrt{2} \cdot \sigma_X)$, antingen exakta värdet eller med två decimaler:

(a) X är ögonantalet, då man kastar en vanlig rättvis 6-sidig tärning. **(2p)**

(b) $X \sim \mathrm{Exp}(2)$, dvs. X är exponentialfördelad med (intensitet)parametervärdet $\lambda = 2$. Då är det också känt att $\mathbb{E}(X) = \mathrm{SD}(X) = 1/\lambda$. **(2p)**

(c) $X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(3, 5^2)$, dvs. X är normalfördelad med väntevärdet $\mu = 3$ och standard-avvikelsen $\sigma = 5$. **(2p)**

En tabell för normalfördelningen

Tabellen nedan innehåller numeriska värden för den kumulativa fördelningsfunktionen för en standardiserad normalfördelning,

$$\Phi(x) = F_Z(x) \; = \; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999