Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi
MS-A0501, MS-A0502, MS-A0503, MS-A0504, MS-A0509 — Tentti
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos — 24.2.2021
Aalto-yliopisto — J Kohonen, G Metsalo

Ohje: Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä.

Tee ratkaisusi käsin omalla käsialallasi selvästi, joko paperille tai tablettitietokoneelle, ja lähetä ratkaisut PDF-muodossa tenttisivulla olevaan palautuslaatikkoon. Huolehdi, että vastauksessasi näkyy: kurssikoodi, sukunimi, etunimi, opiskelijanumero ja päivämäärä.

Kokeen lopussa on standardinormaalijakauman kertymäfunktion taulukko.

T1 Petteri ja Lotta pelaavat seuraavaa peliä. Kumpikin asettaa pottiin rahallisen panoksen, mahdollisesti erisuuren. He heittävät tavallista 6-sivuista noppaa. Jos tulos on 1 tai 2, Lotta voittaa kierroksen, ja jos tulos on 3, 4, 5 tai 6, Petteri voittaa kierroksen. Se, joka ensimmäisenä voittaa kaksi kierrosta, voittaa pelin ja saa potin.

(a) Pelin säännöistä seuraa, että peli kestää joko 2 tai 3 kierrosta. Laske kierrosten määrän odotusarvo. **(2p)**

(b) Petteri asettaa panokseksi 20 euroa. Paljonko Lotan pitää asettaa, jotta peli on reilu, toisin sanoen, että kummankin pelaajan asettaman panoksen osuus potista vastaa hänen voittotodennäköisyyttään? **(2p)**

(c) Lotta voitti ensimmäisen kierroksen. Piki-koira vie nopan eikä peliä voida jatkaa. Pelaajat päättävät jakaa potin siten, että kummankin saama osuus potista vastaa hänen todennäköisyyttään voittaa, jos peliä voitaisiin jatkaa. Laske, miten potti jaetaan. **(2p)**

Historiallinen alaviite. Tehtävä vie meidät todennäköisyyslaskennan alkulähteille. 1600-luvulla ranskalainen de Méré esitti tämänkaltaisen ongelman. Sitä ratkaistessaan Blaise Pascal ja Pierre de Fermat tulivat luoneeksi pohjan todennäköisyyden matemaattiselle käsittelylle.

T2 Avaruusaluksen moottoria käytetään aika T (sekuntia) ja se aiheuttaa kiihtyvyyden $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$. Kiihdytyksen aikana kuljettu matka on $X = \frac{1}{2}aT^2$. Aika T on jatkuva satunnaismuuttuja, joka on tasajakautunut välillä $I = [100,\ 150+r]$, missä r on sinun opiskelijanumerosi **ensimmäinen numero** (eräs numeroista $0, \ldots, 9$; jätä mahdolliset kirjaimet huomioimatta). Merkitse r:n arvo vastaukseesi selvästi ja käytä laskuissa kyseistä numeroarvoa.

(a) Laske kuljetun matkan odotusarvo. **(2p)**

(b) Laske todennäköisyys, että kuljettu matka on yli 20 000 metriä. **(2p)**

(c) Laske kuljetun matkan keskihajonta. **(1p)**

(d) Matkaan lähetetään kymmenen alusta, joiden moottoreita käytetään ajat $T_1, \ldots, T_{10}$, jotka ovat riippumattomat ja tasajakautuneet välillä I. Laske todennäköisyys, että tasan kolme aluksista kulkee kiihdytyksen aikana yli 20 000 metriä. **(1p)**

T3 Olkoon s sinun opiskelijanumerosi **viimeinen numero** (eräs numeroista $0, \ldots, 9$; jätä mahdolliset kirjaimet huomioimatta). Merkitse s:n arvo vastaukseesi selvästi ja käytä laskuissa kyseistä numeroarvoa.

Pussissa on 100 kolikkoa, joista 98 on reiluja (kruunan todennäköisyys 0.5). Yhdessä kruunan todennäköisyys on 0.6 ja yhdessä 0.4. Pussista poimitaan satunnainen kolikko, ja sen kruunatodennäköisyys on tuntematon parametri Θ.

(a) Mikä on todennäköisyys saada pelkkiä kruunia, kun tätä kolikkoa heitetään $30+s$ kertaa? (Vastauksen tulee olla luku, ei Θ:aa sisältävä lauseke.) **(1p)**

(b) Kolikkoa on heitetty $30 + s$ kertaa ja saatu pelkkiä kruunia. Laske parametrin Θ posteriorijakauma. **(2p)**

(c) Laske b-kohdan tilanteessa Θ:n posteriorijakauman moodi (MAP-estimaatti). **(1p)**

(d) Laske b-kohdan tilanteessa Θ:n posteriorijakauman odotusarvo. **(1p)**

(e) Jos tätä samaa kolikkoa heitetään vielä kolme kertaa, mikä on todennäköisyys saada pelkkiä kruunia? **(1p)**

T4 Tšebyšovin epäyhtälö sanoo, että jos satunnaismuuttujan X odotusarvo on $\mu_X \in \mathbb{R}$ ja keskihajonta $\sigma_X \in]0, \infty[$, ja $k \geq 1$, niin $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq k \cdot \sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$. Erityisesti tapauksessa $k = \sqrt{2}$ se sanoo, että

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq \sqrt{2} \cdot \sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Osoita (Tšebyšovin epäyhtälöä käyttämättä) kussakin seuraavista kolmesta tapauksesta, että väite $(*)$ pätee, laskemalla $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \leq \sqrt{2} \cdot \sigma_X)$ joko tarkasti tai kahdella desimaalilla.

(a) X on tavallisen 6-sivuisen nopan heittotulos. **(2p)**

(b) $X \sim \text{Exp}(2)$, toisin sanoen X on eksponenttijakautunut taajuusparametrilla $\lambda = 2$. Silloin tiedetään myös, että $\mathbb{E}(X) = \text{SD}(X) = 1/\lambda$. **(2p)**

(c) $X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(3, 5^2)$, toisin sanoen X on normaalijakautunut odotusarvolla $\mu = 3$ ja keskihajonnalla $\sigma = 5$. **(2p)**

Normaalijakauman taulukko

Allaolevaan taulukkoon on koottu lukuarvoja normitetun normaalijakauman kertymäfunktiolle

$$\Phi(x) = F_Z(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999