MS-A0002 Matriisilaskenta — Turunen / Myyryläinen
MS-A0003 Matriisilaskenta — (Aalto-yliopisto)
26.2.2021, 16:30–20:30

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Voit käyttää laskinta (tai Matlabia) ja kurssin materiaalia. Perustele ratkaisusi: pelkkä lopputulos ei riitä. Koetehtävät on ratkottava itsenäisesti. Kerro mitä lähteitä käytit ratkaisuissasi.

Arvostelusta: Tarkastaja pisteyttää jokaisen tehtävän asteikolla 0...6. Täydet pisteet voi saada vastauksesta, jossa on harmiton pikkuvirhe. Tehtävästä on mahdollista saada pisteitä, jos vastauksessa on vähänkin asiaa (oikeanlaisia määritelmiä, aiheeseen liittyviä kuvia, laskelmia jne.) — tyhjä vastaus on varmasti nollan pisteen arvoinen.

1. Etsi matriisi $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, jolle pätee
$$A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}.$$

2. Tarkastellaan matriisia $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, missä $M = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & e & f\end{bmatrix}$.

   (a) Laske matriisin M determinantti.

   (b) Vetoamatta a-kohdan tulokseen todista, että tässä matriisi M ei ole kääntyvä millään luvuilla $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. (Vihje: Mieti, miten lineaarikuvaus $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tässä toimii. Onko se injektio tai surjektio?)

3. Matriisista $X = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiedetään, että $\begin{cases} a + d = 8,\\ ad - bc = 15.\end{cases}$

   (a) Etsi matriisin X ominaisarvot.

   (b) Onko matriisi X diagonalisoituva? Perustele!

4. Tarkastellaan matriisia $P = \begin{bmatrix}73 & -36\\-36 & 52\end{bmatrix}$.

   (a) Etsi matriisin P ominaisarvot.

   (b) Näytä, että P on *positiivinen* eli että $\langle Pu, u\rangle \geq 0$ kaikilla $u \in \mathbb{C}^{2\times 1}$.

   (c) Etsi positiivinen matriisi $Q \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, jolle pätee $QQ = P$.