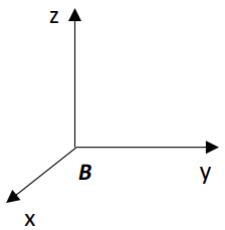
ELEC-C1320/ELEC-D1320 – Robotiikka, Exam 14.9.2020 (3 hours)

It is allowed to use a calculator in the exam. You can also use the material published on the ELEC-C1320, 2019 MyCourses pages and Corke's as well as Craig's robotics textbooks for solving the problems.

You can use Finnish, English or Swedish in your solutions. Tehtävänannot on esitetty suomeksi sinisellä värillä. The problem definitions are given in Finnish in blue color.

1. The homogenous transformation matrix $\boldsymbol{T}$ describes the position and orientation of a new coordinate frame {N} with respect to the base frame {B}:
Homogeeninen muunnosmatriisi $\boldsymbol{T}$ kuvaa uuden koordinaatiston {N} paikkaa ja asentoa peruskoordinaatiston {B} suhteen:

$$ {}^{B}\boldsymbol{T}_{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



Illustrate the new coordinate frame {N} in relation to the base frame {B} (*i.e the position of the origin and the directions of the coordinate axes of the new frame {N} in relation to the base frame {B} shown in the drawing above*).
Esitä kuvan avulla uuden koordinaatiston {N} sijainti peruskoordinaatiston {B} suhteen (toisin sanoen, piirrä uuden koordinaatiston {N} origon paikka ja akselien suunnat suhteessa peruskoordinaatistoa {B} esittävään kuvaan, joka on annettu yllä)

(5 points)

2. 3D-frame {B} is located initially coincident with the frame {A}. We first rotate frame {B} about its x-axis by 90 degrees. Then we translate the origin of the rotated frame {B} 5 units in the direction of its z-axis. 3D-koordinaatisto {B} on aluksi samassa paikassa ja asennossa koordinaatiston {A} kanssa. Ensimmäisessä vaiheessa koordinaatiston {B} asentoa muutetaan kiertämällä sitä oman x-akselinsa ympäri 90 astetta. Tämän jälkeen kiertyneen koordinaatiston {B} origon paikkaa siirretään 5 yksikköä oman z-akselinsa suuntaan.

a) Give the 4x4 homogenous transformation matrix, which describes the position and orientation of frame {A} with respect to frame {B}. Määritä 4x4 homogeeninen muunnosmatriisi, joka kuvaa koordinaatiston {A} paikkaa ja asentoa koordinaatiston {B} suhteen. (7 points)

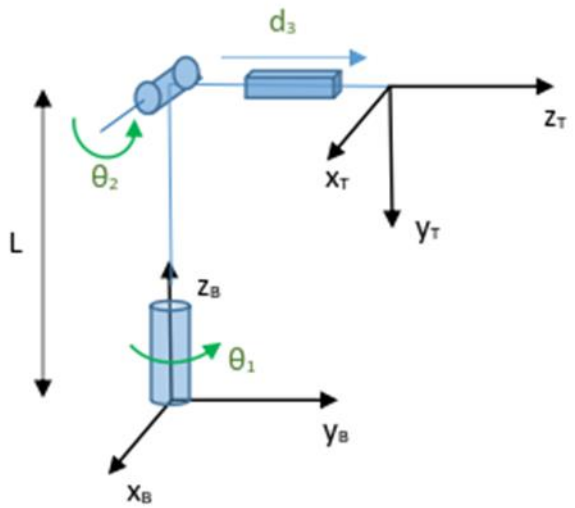
b) The coordinates of a point **P** with respect to frame {A} be are [x=3,y=0,z=0]. What are the coordinates of point **P** given with respect to frame {B}? Pisteen **P** koordinaatit koordinaatiston {A} suhteen ovat [x=3,y=0,z=0]. Mitkä ovat pisteen **P** koordinaatit koordinaatiston {B} suhteen? (7 points)

3. In the figure a 3-axes RRP-type manipulator is shown. When the rotational joint angles, θ_1 and θ_2, have a value zero, the upper arm is oriented horizontally above the Y_B axis.

Alla olevassa kuvassa on esitetty kolmen vapausasteen RRP-manipulaattorin kinemaattinen rakenne. Kun kaksi ensimmäistä, kiertyvää nivelohjausta, θ_1 and θ_2, saavat ohjausarvon 0, mekanismin uloin varsi asemoituu vaakasuoraan Y_B akselin yläpuolelle.

Solve the forward kinematics problem of the manipulator to describe the tool frame {T} with respect to the robot base frame {B}. In other words, assign the link frames in the figure and provide the corresponding DenavitHartenberg-parameters in a table (*as well as base and tool transformation matrices*). Ratkaise mekanismin suora kinemaattinen muunnos työkalukoordinaatiston {T} paikan ja asennon kuvaamiseksi peruskoordinaatiston {B} suhteen robotin nivelohjausten funktiona. Toisin sanoen, piirrä kuvaan nivel-/vapausastekoordinaatistot ja anna taulukossa vastaavat DenavitHartenberg parametrit (sekä tämän lisäsi myös tarvittavat perusmuunnos- ja työkalumuunnosmatriisit).

Use the **Standard** Denavit-Hartenberg (DH) parameter convention for your solution. (18 points)
Sovella ratkaisussasi **Standard** Denavit-Hartenberg (DH)-menetelmää.



4. The task is to form an **orthonormal, right-handed** coordinate frame by means of three reference points (3x1 point vectors with x-, y- and z-coordinates given w.r.t. the world frame), $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$. Rules for creating the coordinate frame are as follows:

1. The origin of the coordinate frame should be located at point $\mathbf{P}_1$.
2. The x-axis of the orthogonal coordinate frame should be parallel to the vector pointing from $\mathbf{P}_1$ to $\mathbf{P}_2$.
3. The z-axis should be the parallel to the normal of the plane the basis of which is formed from the $\mathbf{P}_2$-$\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_3$-$\mathbf{P}_1$ vectors (i.e. the vectors $\mathbf{P}_2$-$\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_3$-$\mathbf{P}_1$ are parallel to the plane)
4. The y-axis is determined with right hand-rule to form an orthogonal coordinate frame.

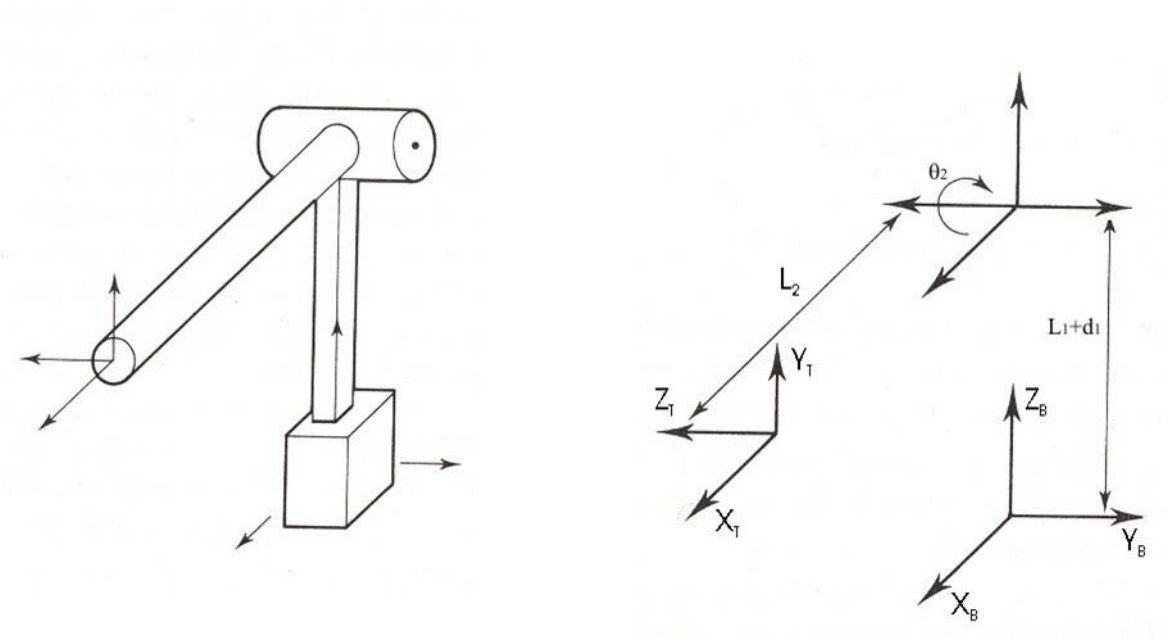
Show the different steps and calculations to create an orthonormal **homogenous 4x4 transformation matrix** that describes the position and orientation of the new coordinate frame with respect to the reference frame. So, describe what kind of operations to do in which order to create the requested 4x4 homogenous transformation matrix by means of the three 3D-point vectors.

Tehtävänä on muodostaa suorakulmainen oikeakätinen koordinaatisto annetun kolmen referenssipisteen avulla (kutakin referenssipistettä vastaa 3x1-paikkavektori, johon on talletettu referenssipisteen x-, y- ja z-koordinaatit maailmankoordinaatiston suhteen), $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$. Koordinaatisto tulee luoda seuraavien sääntöjen mukaisesti:

1. Koordinaatiston origon tulee sijaita pisteessä $\mathbf{P}_1$.
2. Koordinaatiston x-akselin tulee olla samansuuntainen pisteestä $\mathbf{P}_1$ pisteeseen $\mathbf{P}_2$ viritetyn vektorin kanssa.
3. Koordinaatiston z-akselin tulee olla vektorien $\mathbf{P}_2$-$\mathbf{P}_1$ ja $\mathbf{P}_3$-$\mathbf{P}_1$ virittämän tason normaalin suuntainen (ts. *tason virittävät vektorit* $\boldsymbol{P_2}$-$\boldsymbol{P_1}$ *ja* $\boldsymbol{P_3}$-$\boldsymbol{P_1}$ *ovat tason itsensä suuntaisia*)
4. Koordinaatiston y-akseli määritetään oikean käden kiertosäännon avulla.

Esitä menetelmän eri vaiheet ortonormeeratun koordinaatiston paikkaa ja asentoa kuvaavan **4x4 homogeenisen muunnosmatriisin** muodostamiseksi kolmen 3D-referenssipisteen avulla. Kuvaa menetelmän eri vaiheet järjestyksessä. (13 points)

5. Solve the <u>inverse kinematics problem</u> for the two degree of freedom PR manipulator shown in the figure. The first degree-of-freedom (dof) is prismatic (control of the height of the upper arm with respect to the horizontal plane, L+$\mathbf{d_1}$) and the second dof is rotational (control of the angle of the upper arm with respect to the horizontal plane, $\boldsymbol{\theta_2}$). When the rotational joint is given a zero value, the upper arm is oriented horizontally above the X_B-axis. Also, the direction of positive rotation is marked in the figure.
Muodosta alla olevassa kuvassa esitetyn, kahden vapausasteen PR-robottimekanismin <u>käänteinen kinemaattinen muunnos</u>. Ensimmäinen liikevapausaste on prismaattinen (yläkäsivarren alkupisteen etäisyyden ohjaus robotin vaakasuoran kiinnitysalustan suhteen, L+$\mathbf{d_1}$) ja toinen liikevapausaste on kiertyvä nivel (yläkäsivarren kierto vaakatason suhteen, $\boldsymbol{\theta_2}$). Kiertokulman arvolla nolla yläkäsivarsi on vaakatasossa X_B-akselin yläpuolella. Myös kiertokulman positiivinen kiertosuunta on merkitty kuvaan. (10 points)



ELEC-C1320 Robotiikka - Equations

Link parameters and the corresponding elementary transformations as well as the symbolic form of the link matrix according to the **standard** Denavit and Hartenberg parameter convention:

$$^{j-1}\xi_j\left(\theta_j, d_j, a_j, \alpha_j\right) = \mathscr{R}_z\left(\theta_j\right) \oplus \mathscr{T}_z\left(d_j\right) \oplus \mathscr{T}_x\left(a_j\right) \oplus \mathscr{R}_x\left(\alpha_j\right)$$

$$^{j-1}\boldsymbol{A}_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j\cos\alpha_j & \sin\theta_j\sin\alpha_j & a_j\cos\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j\cos\alpha_j & -\cos\theta_j\sin\alpha_j & a_j\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_j & \cos\alpha_j & d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Link parameters and the corresponding elementary transformations as well as the symbolic form of the link matrix according to the **modified** Denavit and Hartenberg parameter convention:

$$^{j-1}\xi_j\left(\alpha_{j-1}, a_{j-1}, d_j, \theta_j\right) = \mathscr{R}_x\left(\alpha_{j-1}\right) \oplus \mathscr{T}_x\left(a_{j-1}\right) \oplus \mathscr{T}_z\left(d_j\right) \oplus \mathscr{R}_z\left(\theta_j\right)$$

$$^{j-1}\boldsymbol{A}_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 & a_{j-1} \\ \sin\theta_j\cos\alpha_{j-1} & \cos\theta_j\cos\alpha_{j-1} & -\sin\alpha_{j-1} & -\sin\alpha_{j-1}\,d_j \\ \sin\theta_j\sin\alpha_{j-1} & \cos\theta_j\sin\alpha_{j-1} & \cos\alpha_{j-1} & \cos\alpha_{j-1}\,d_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementary rotation transformations (i.e. rotations about principal axis by Θ):

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse of a 4x4 transformation matrix:

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^T & -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Derivation of trigonometric functions:

Dsinx = cosx

Dcosx = - sinx

Definition of (manipulator) Jacobian matrix:

If $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$ and $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ and $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ then the Jacobian is the $m \times n$ matrix

$$J = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Jacobian transpose transforms a wrench (a vector of forces and torques) applied at the end-effector, ${}^0\boldsymbol{W}$, to torques and forces experienced at the joints $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{Q} = {}^{0}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{T}\,{}^{0}\boldsymbol{W} \tag{8.9}$$