

Ohje: Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä. Kokeessa on 4 tehtävää, jokaisesta saa 0–6 pistettä.

Tee ratkaisusi **käsin omalla käsialallasi** selvästi, joko paperille tai tablettitietokoneelle, ja lähetä ratkaisut PDF-muodossa tenttisivulla olevaan palautuslaatikkoon. Huolehdi, että vastauksessasi näkyy: kurssikoodi, sukunimi, etunimi, opiskelijanumero ja päivämäärä. Kokeen lopussa on standardinormaalijakauman kertymäfunktion taulukko.

T1 Pankkikortin PIN-koodissa on neljä numeroa, jotka kukin arvotaan toisistaan riippumatta diskreetistä tasajakaumasta joukossa $\{0, 1, \dots, 9\}$.

- (a) Mikä on todennäköisyys, että kaikki numerot ovat parillisia? (1p)
- (b) Mikä on todennäköisyys, että koodin kaikki numerot ovat samat? (1p)
- (c) Mikä on todennäköisyys, että koodissa ei ole kahta samaa numeroa? (1p)
- (d) Mikä on todennäköisyys, että numeroista kaksi on parillisia ja kaksi parittomia? (2p)
- (e) Mikä on parillisten numeroiden lukumäärän odotusarvo? (1p)

T2 Kullakin ajanhetkellä $t \in \mathbb{R}$ vaihtovirran jännite on $u(t) = \sin(t)$ ja teho $p(t) = u(t)^2$. Valitaan satunnainen ajanhetki T jatkuvasta tasajakaumasta välillä $[0, 2\pi]$. Määritellään satunnaismuuttujat $U = u(T)$ ja $P = p(T)$. Laske:

- (a) $\mathbb{E}(T)$ (1p)
- (b) $\mathbb{E}(U)$ (2p)
- (c) $\mathbb{E}(P)$ (3p)

Hyödyllisiä trigonometrian kaavoja:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$
$$(\sin(x))^2 = (1 - \cos(2x))/2$$

T3 Olkoon s **sinun opiskelijanumerosi viimeinen numero** (eräs numeroista $0, \dots, 9$; jätä mahdolliset kirjaimet huomioimatta). Merkitse s :n arvo vastaukseesi selvästi ja käytä laskuissa kyseistä numeroarvoa.

Auton tuulilasiin osuu hyönteisiä satunnaisesti. Ensimmäinen osuu X_1 minuutin kuluttua lähtöhetkestä, ja sen jälkeen osumien väliajat ovat X_2, X_3, \dots minuuttia. Kukin X_i on toisista riippumatta eksponenttijakautunut taajuusparametrilla $\lambda = 3 + (s/10)$ hyönteistä minuutissa, eli tiheysfunktioilla

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

kun $t > 0$. Tiedetään, että tällöin $\mathbb{E}(X_i) = \text{SD}(X_i) = 1/\lambda$.

Herra K ajaa kunnes tuulilasiin on osunut 50 hyönteistä. Aikaa kuluu $S = X_1 + \dots + X_{50}$.

- (a) Laske $\mathbb{E}(S)$ ja $\text{SD}(S)$ kolmella desimaalilla. **(2p)**
- (b) Laske normaaliapproksimaatiota käyttäen likimääräinen todennäköisyys sille, että aikaa kuluu yli 17 minuuttia. **(2p)**
- (c) Laske todennäköisyys sille, että ainakin yksi väliajoista X_1, X_2, \dots, X_{50} on yli 1,2 minuuttia. Älä käytä normaaliapproksimaatiota. **(2p)**

T4 Eri kirjainten suhteelliset esiintyvyydet kolmessa kielessä (englanti, ruotsi, suomi) ovat seuraavan sivun taulukon mukaiset. Oletamme, että tekstissä kukin kirjain arvotaan toisistaan riippumatta kyseisen kielen taulukon mukaisesti, esim. suomenkielisessä tekstissä kukin kirjain on A todennäköisyydellä 0,121.

Eräässä viestikanavassa on 80 % viesteistä englanninkielisiä, 10 % ruotsinkielisiä ja 10 % suomenkielisiä. Kanavalta on napattu yksi satunnainen viesti, ja sen sisältö on: "SALAKKA". Laske viestin kielen posteriorijakauma, toisin sanoen laske todennäköisyydet sille että se on englantia, sille että se on ruotsia, ja sille että se on suomea.

Taulukko tehtävään T4.

kirjain	englanti	ruotsi	suomi
A	0.081	0.094	0.121
B	0.015	0.015	0.003
C	0.028	0.015	0.003
D	0.042	0.048	0.010
E	0.127	0.101	0.080
F	0.021	0.020	0.002
G	0.020	0.030	0.004
H	0.061	0.021	0.019
I	0.070	0.058	0.108
J	0.002	0.006	0.020
K	0.008	0.031	0.050
L	0.040	0.053	0.058
M	0.024	0.035	0.032
N	0.067	0.085	0.088
O	0.075	0.045	0.056
P	0.019	0.018	0.018
Q	0.001	0.000	0.000
R	0.060	0.084	0.029
S	0.063	0.066	0.079
T	0.091	0.077	0.088
U	0.028	0.019	0.050
V	0.010	0.024	0.023
W	0.024	0.001	0.001
X	0.002	0.002	0.000
Y	0.020	0.007	0.017
Z	0.001	0.001	0.001
Å	0.000	0.013	0.000
Ä	0.000	0.018	0.036
Ö	0.000	0.013	0.004

Normaalijakauman taulukko

Allaolevaan taulukkoon on koottu lukuarvoja normitetun normaalijakauman kertymäfunktiolle

$$\Phi(x) = F_Z(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999