Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0203 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Malinen/Hirvi)
MS-A0204 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Alestalo)
MS-A0205 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Malinen)

Kurssitentti, uusintatentti ja yleinen tentti 15.4.2021 klo 9.00–13.00.

Kurssi- ja uusintatentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.

Jokainen III- tai IV-periodin kurssille osallistunut voi yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + voimassa olevat laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Olkoon
$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+1}.$$
Laske funktion $f(x,y)$ suunnattu derivaatta ellipsin
$$2x^2 + y^2 = 1$$
ulkoyksikkönormaalin suuntaan.

2. Määritä pinnan
$$x^2 - 2xy + y^5 - \sin z = 0$$
pisteeseen $(1,1,0)$ asetetun tangenttitason yhtälö.

3. Funktioista $g(t)$ ja $h(t)$ tiedetään ominaisuudet
$$g(2) = -3,\ h(2) = 4,\ g'(2) = 5,\ h'(2) = -6,$$
ja funktiosta $f(x,y)$ osittaisderivaatat
$$f_x(-3,4) = -7 \text{ ja } \ f_y(-3,4) = 8.$$
Laske yhdistetyn funktion $f(g(t),h(t))$ derivaatta kohdassa $t = 2$.

4. Määritä funktion
$$f(x,y,z) = x + 2y + \frac{z^2}{2}$$
suurin ja pienin arvo pallolla $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ käyttämällä Lagrangen menetelmää.

5. Tarkastellaan yksikköympyrästä leikattua sektoria, joka on annettu napakoordinaateissa
$$D_a = \{(r,\theta)\,|\,0 \le r \le 1,\, a \le \theta \le 2\pi - a\}$$
missä $a \in [0,\pi)$.
a) Piirrä kuva sektorista D_a, kun $a = \pi/4$. (1p)
b) Laske sektorin D_a keskiön (eli massakeskipisteen) x-koordinaatti
$$\overline{x}(a) = \frac{1}{A}\iint_{D_a} x\, dA,$$
jossa A on sektorin D_a pinta-ala. Missä keskiö sijaitsee luvun a funktiona? (4p)
c) Mitä omituista tapahtuu sektorille D_a ja keskiön koodinaatille $\overline{x}(a)$, kun $a \to \pi$? (1p)

6. Arkkienkeli *Gabrielin torveksi* kutsutaan pyörähdyskappaletta, joka lausutaan helpoimmin sylinterikoordinaateissa[1] muodossa
$$G = \{(r,\theta,z)\,|\,0 \le r \le \frac{1}{z},\, z \ge 1,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$
a) Laske Gabrielin torven tilavuus V epäoleellisella tilavuusintegraalilla antaen yksityiskohtaisesti kaikki välivaiheet. (4p)
b) Napakoordinaateissa laskettuna pintaintegraalina Gabrielin torven pinta-ala saadaan seuraavaan epäoleellisen integraalin muotoon
$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{r^4}}\cdot r\, dr\, d\theta.$$
(Tätä kaavaa ei tarvitse johtaa, vaikkakin se olisi mahdollista kurssin puitteissa.) Perustele, miksi pintaintegraali ei suppene (eli $A = \infty$). (2p)
c) Paljonko maalia tarvitaan Gabrielin torven sisäpinnan maalaamiseen? (0p)

Huom. 1: Kurssin MS-A0203 palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!
Huom. 2: MS-A0203-kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet otetaan huomioon ja parempi tulos jää voimaan. Myös uusintaan osallistuvien täytyy ilmoittautua tenttiin.

[1] Huom: Kurssilla MS-A0204 sylinterikoordinaatiston aksiaalista etäisyyttä on merkitty symbolilla $r_\perp$, joka on tässä tehtävässä kirjoitettu muodossa r.