

**30A03000 – Talousmatematiikan perusteet**  
**Välikoe 2 (kotitentti), kevät 2021**

Lauri Viitasaari

---

*Kirjoita palautettavaan tiedostoon nimesi ja opiskelijanumerosi. Voit palauttaa tehtävät käsinkirjoitettuina skannattuina ratkaisuihin tai halutessasi kirjoittaa vastauksesi puhtaaksi tietokoneella.*

*Esitä ratkaisuisissa myös oleelliset välivaiheet. Pelkkä vastaus tai tietokone-ohjelman tuloste ei riitä. Kotitentissä on erityisen tärkeää osoittaa osaamisesi ja ymmärtämisesi pelkän vastauksen sijaan.*

*Palauta ratkaisusi mc-sivujen kautta 18.4.2021 klo 12.00 mennessä yhtenä pdf-tiedostona. Pidä huoli, että palautat ratkaisusi ajoissa välttääksesi esimerkiksi mahdolliset tekniset ongelmat. Myöhästyneitä ratkaisuja tai väärässä muodossa olevia palautuksia ei oteta vastaan.*

*Kokeessa on viisi tehtävää joista jokainen on 0-6 pisteen arvoinen.*

1. Muodosta seuraavien funktioiden gradientit.

(a)  $f(x, y) = xy^2 + x \ln y + 2x,$

(b)  $h(a, b) = a^{3b} + ab,$

(c)  $g(x_1, x_2) = x_1^{x_2+4} + \ln \sqrt{x_2 + 1}.$

**Huomautus:** muista esittää välivaiheet ja perustella käyttämäsi derivointisäännöt.

2. Paperiteollisuusyrityksen tuotannon arvoa (M€) kuvaa funktio

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x_1, x_2) = 2x_1^{0.3}x_2^{0.7},$$

missä  $x_1$  on työpanos (M€) ja  $x_2$  on pääoma (M€).

- (a) Oletetaan yrityksen investointitason olevan tällä hetkellä  $x_1 = 20$  ja  $x_2 = 30$ . Miten jakaisit 10 M€:n lisäpanoksen työvoima- ja pääomapanoksen suhteen? Kuinka paljon tuotannon arvo tällöin kasvaa?
- (b) Laske  $D_1 \ln f(x_1, x_2)$  ja  $D_2 \ln f(x_1, x_2)$ , kun  $x_1 = 20$  ja  $x_2 = 30$ . Mitä nämä arvot kuvaavat?
- (c) Laske myös osittaisjoustot, kun  $x_1 = 20$  ja  $x_2 = 30$ . Mitä nämä arvot kuvaavat?

3. Paperiteollisuusyrityksen tuotannon arvoa (M€) kuvaa funktio

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x_1, x_2) = 2x_1^{0.3}x_2^{0.7},$$

missä  $x_1$  on työpanos (M€) ja  $x_2$  on pääoma (M€). Oletetaan, että rahaa on käytössä 50 M€.

- (a) Miten raha pitää jakaa työpanokselle ja pääomalle, jotta tuotannon arvo maksimoituu. Muista tutkia ääriarvon laatu. (**Huomautus:** tarkoitus on käyttää Lagrangen menetelmää eikä ratkaista tehtävää esim. suoraan solverin avulla)

- (b) Mikä on tuotannon maksimiarvo?
- (c) Mikä on budjettirajoituksen varjohinta? Miten tulkitset varjohintaa?

4. Yritys valmistaa mustikkahilloa. Hillo sisältää lievästi haitallista ainetta, jonka määrä  $f$  (mg/kg) riippuu lisäaineen  $A$  määrästä  $x_1$  (g/kg) sekä lisäaineen  $B$  määrästä  $x_2$  (g/kg) funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3$$

mukaisesti. Paljonko  $A$ :ta ja  $B$ :tä on käytettävä, jotta haitallisen aineen määrä hillossa minimoituu? Mikä on minimiarvo? Muista tutkia ääriarvon laatu.

5. Tarkastellaan funktiota

$$f(x, y) = xy + x^{-1} + \ln y.$$

Oletetaan lähtötilanteeksi  $x = 2$  ja  $y = 1$ .

- (a) Arvioi gradientin avulla  $f$ :n muutos, kun  $x$ :ää kasvatetaan 0.1 ja  $y$ :tä pienennetään 0.1. Mikä on  $f$ :n todellinen muutos?
- (b) Määritä suunta (vektori), johon funktio kasvaa nopeiten. Määritä myös suunta, johon funktio vähenee nopeiten. (**Huomautus:** suuntavektorin pituudella ei ole väliä, ainoastaan suunnalla)
- (c) Mihin suuntaan funktion arvot eivät muutu? (**Huomautus:** suuntavektorin pituudella ei ole väliä, ainoastaan suunnalla)