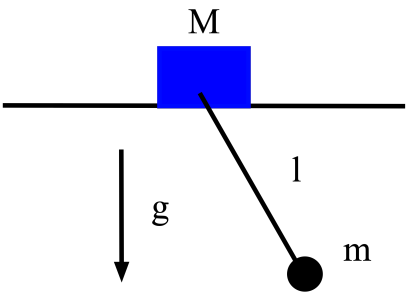
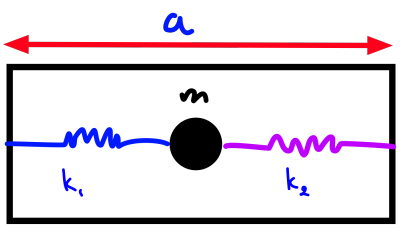
Aalto University
School of Science

PHYS-C0230 Klassinen dynamiikka
Tentti 3.6.2021

1. Heiluri, jonka pituus on l ja massa m, on kiinnitetty vaakasuoralla pinnalla olevaan massaan M. Kiinnityspiste voi siis liikkua ja se liikkuu kitkattomasti. Painovoima vaikuttaa alaspäin painovoimakiihtyvyydellä g.
a) Muodosta Lagrangen funktio (3p.)
b) Johda tilannetta kuvaavat Lagrangen liikeyhtälöt ja osoita, että massan M tullessa suureksi yhtälö(t) lähestyvät sellaisen heilurin liikeyhtälöä, jonka kiinnityspiste pysyy paikallaan (tai liikkuu vakionopeudella) (2p.).
c) Onko tilanteessa syklisiä koordinaatteja? (1p.)



2. Massa m on laatikossa (ks. kuva) ja kiinnitetty vastapäisiin seiniin kiinnikkeillä, joissa on (erilaiset) jouset. Voit yksinkertaisuuden vuoksi olettaa jousien lepopituuden olevan nolla ja painovoimasta ei tarvitse välittää. Valitse yleistetyksi koordinaatiksi massan etäisyys vasemmasta seinästä.
a) Johda tilanteen Lagrangen funktio ja siitä sitä vastaava Hamiltonin funktio käyttäen Hamiltonin funktion määritelmää. (4p.)



b) Johda Hamiltonin liikeyhtälöt. (2p.)

3. a) Osoita Hamiltonin periaatetta käyttäen, että voit muodostaa uuden Lagrangen funktion L' aikaisemmasta $L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t)$

$$L'(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) = L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, t) + \frac{dF(q_1 \dots q_n, t)}{dt}, \tag{1}$$

ilman, että liike-yhtälöt muuttuvat. (3p.)

b) Harmonisen oskillaattorin $H = p^2/2m + m\omega q^2/2$ käsittelyssä muunnos $p = \sqrt{2Pm\omega}\cos Q$ ja $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$ on joskus hyödyllinen. Laskemalla Poissonin sulut eksplisiittisesti, osoita, että muunnos on kanoninen. (3p.)

4. Kirjoita essee kaksoisparadoksista (twin paradox) erityisessä suhteellisuusteoriassa. Kerro mistä siinä on kysymys ja miten paradoksi ratkaistaan. Täysiin pisteisiin vaaditaan hiukan matemaattisempaa selitystä. Esimerkiksi selkeää aika-avaruusdiagrammien käyttämistä paradoksin ratkaisemiseksi. (Varsinainen kvantitatiivinen lasku ei ole välttämätön täysiin pisteisiin, mutta jos sen kykenee tekemään vaikkapa numeerisesti ei siitä toki rangaista.)