Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Kurki
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0301 Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Kurssitentti ja yleinen tentti 16.4.2021 klo 9.00–13.00.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen kurssille osallistunut voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: "viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet" tai "pelkät kuusi koetehtävää".

1. Avaruuskäyrällä C on parametriesitys
$$\mathbf{r}(t) = (3t^2, 4t^3, 3t^4),\ -1 \leq t \leq 2.$$
Laske vektorikentän
$$\mathbf{F}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$
viivaintegraali
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$
a) suoraan viivaintegraalin määritelmää käyttämällä; **ja**
b) käyttämällä skalaaripotentiaalia, jos sellainen on olemassa.

2. Olkoon
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$
kahden ympyrän väliin jäävä tasoalue. Laske viivaintegraali
$$\oint_{\partial D} yx^2\,dx + xy\,dy$$
Greenin kaavan avulla.

3. Olkoon $\mathbf{u} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ vakiovektori ja $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ kolmiulotteisen avaruuden paikkavektori. Sievennä lausekkeet
a) $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$,
b) $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{r})$,
c) $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{r}$.

4. Tarkastellaan (epäsäännöllistä) tetraedria T, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ ja $(0,0,1)$. Hahmottele kuva!
a) Tetraedrin kallellaan oleva ylätahko on kolmio, jonka kärkinä ovat kolme viimeistä pistettä. Määritä ylätahkon yhtälö muodossa $ax + by + cz = d$ ja sen normaalivektori.
b) Osoita, että vektorikentän
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
vuo tetraedrin kaikkien kolmen muun tahkon $x = 0$, $y = 0$ tai $z = 0$ läpi on nolla.
c) Laske b-kohdan vektorikentän vuo tetraedrin ylätahkon läpi (positiivinen suunta yläviistoon) joko
(i) käyttämällä a-kohtaa ja vuon määritelmää;
(ii) käyttämällä Gaussin lausetta ja b-kohtaa.

5. Tarkastellaan kolmiulotteista kappaletta

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$$

(= onton pallon puolikas). Laske kappaleen keskiön z-koordinaatti

$$\overline{z} = \frac{1}{V} \iiint_K z\, dV.$$

Sijaitseeko keskiö kappaleen sisä- vai ulkopuolella?
Huom: Tilavuuden V laskemisessa voi olettaa tunnetuksi pallon tilavuuden kaavan.

6. Olkoon J pisteiden $(-1, 0, 0)$ ja $(1, 0, 0)$ välinen yhdysjana kolmiulotteisessa avaruudessa. Pinta P saadaan yhdistämällä ympyrän

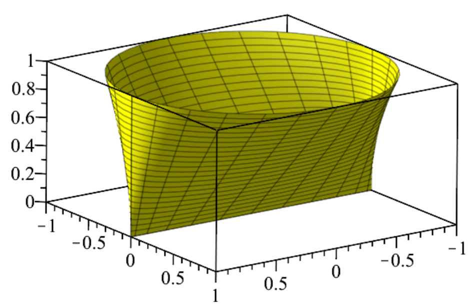
$$x^2 + y^2 = 1,\ z = 1,$$

piste $(\cos u, \sin u, 1)$ janan J pisteeseen $(\cos u, 0, 0)$ jokaisella $0 \le u \le 2\pi$. Näin saadaan pinta, jolla on parametrisointi $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$,

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v, \end{cases}$$

jossa $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 1$.

```
> plot3d([cos(u), v*sin(u), v], u = 0..2*Pi, v = 0..1, color=yellow,
scaling=constrained)
```



Määritä pinnan normaalivektori ja pinta-alan paikallinen suurennussuhde parametrien arvoja $u = \pi/4$ ja $v = 1/2$ vastaavassa pisteessä. (6 p.)
Vapaaehtoinen ekstratehtävä, jos jää ylimääräistä aikaa: Laske pinnan P pinta-alan likiarvo jonkin ohjelmiston avulla. (0 p.)

Huom. 1: IV-periodin kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden pisteen, joka lisätään skaalattuihin harjoituspisteisiin (max 60 + 1).
Huom. 2: Kurssitentin voi uusia seuraavan tentin yhteydessä. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**