

30A03000 – Talousmatematiikan perusteet

Tentti (kotitentti), Syyskuu 2021

Lauri Viitasaari

Kirjoita palautettavaan tiedostoon nimesi ja opiskelijanumerosi. Voit palauttaa tehtävät käsinkirjoitettuina skannattuina ratkaisuihin tai halutessasi kirjoittaa vastauksesi puhtaaksi tietokoneella.

Esitä ratkaisuihin myös oleelliset välivaiheet. Pelkkä vastaus tai tietokone-ohjelman tuloste ei riitä. Kotitentissä on erityisen tärkeää osoittaa osaamisesi ja ymmärtämisesi pelkän vastauksen sijaan.

Palauta ratkaisusi mc-sivujen kautta 12.9.2021 klo 12.00 mennessä yhtenä pdf-tiedostona. Pidä huoli, että palautat ratkaisusi ajoissa välttääksesi esimerkiksi mahdolliset tekniset ongelmat. Myöhästyneitä ratkaisuja tai väärässä muodossa olevia palautuksia ei oteta vastaan.

Kokeessa on viisi tehtävää joista jokainen on 0-6 pisteen arvoisin.

- Lainan määrä on 20 000 euroa, vuosikorko 3% ja laina maksetaan viidessä vuodessa annuiteettiperiaatteella neljännesvuosittain.
 - Mikä on maksuerän suuruus?
 - Paljonko korkoja maksetaan yhteensä koko laina-aikana?
 - Paljonko korkoja maksettaisiin yhteensä, jos annuiteetin sijaan lainapäätöksen lyhennys olisi samansuuruinen jokaisena neljännesvuotena? (**Huomautus:** Muista perustella vastauksesi!)
- Auton arvo uutena on 80 000 euroa ja se vähenee 10 % vuodessa.
 - Määrittää funktio $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 80000]$, $a = f(t)$, joka kuvaa auton arvoa t vuoden kuluttua.
 - Hahmottele funktion f kuvaaja ja määritä sen perusteella raja-arvo $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.
 - Määrittää käänteisfunktio $f^{-1} : (0, 80000] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $t = f^{-1}(a)$. Mitä se kuvaa? (**Huomautus:** Muista perustella vastauksesi!)
 - Kuinka pitkän ajan kuluttua auton arvo on 10000 euroa?
- Määritä (osittais)derivaatat:
 - $\frac{\partial f}{\partial x}$, kun $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$,
 - $\frac{\partial f}{\partial y}$, kun $f(x, y) = xy^2 + x \ln y + 2x$,
 - $\frac{\partial g}{\partial x_2}$, kun $g(x_1, x_2) = x_1^{x_2+4} + \ln \sqrt{x_2+1}$.

Huomautus: muista esittää välivaiheet ja perustella käyttämäsi derivointisäännöt.

- Paperiteollisuusyrityksen tuotannon arvoa (M€) kuvaa funktio

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x_1, x_2) = 2x_1^{0.3}x_2^{0.7},$$

missä x_1 on työpanos (M€) ja x_2 on pääoma (M€). Oletetaan, että rahaa on käytössä 50 M€.

- (a) Miten raha pitää jakaa työpanokselle ja pääomalle, jotta tuotannon arvo maksimoituu. Muista tutkia ääriarvon laatu. (**Huomautus:** tarkoitus on käyttää Lagrangen menetelmää eikä ratkaista tehtävää esim. suoraan solverin avulla)
- (b) Mikä on tuotannon maksimiarvo?
- (c) Mikä on budjettirajoituksen varjohinta? Miten tulkitset varjohintaa?

5. Tarkastellaan funktiota

$$f(x, y) = xy + x^{-1} + \ln y.$$

Oletetaan lähtötilanteeksi $x = 2$ ja $y = 1$.

- (a) Arvioi gradientin avulla f :n muutos, kun x :ää kasvatetaan 0.1 ja y :tä pienennetään 0.1. Mikä on f :n todellinen muutos?
- (b) Määritä suunta (vektori), johon funktio kasvaa nopeiten. Määritä myös suunta, johon funktio vähenee nopeiten. (**Huomautus:** suuntavektorin pituudella ei ole väliä, ainoastaan suunnalla)
- (c) Mihin suuntaan funktion arvot eivät muutu? (**Huomautus:** suuntavektorin pituudella ei ole väliä, ainoastaan suunnalla)